Cálculo infinitesimal de varias variables reales Volumen 1

José María Rocha Martínez
Departamento de Matemáticas
Escuela Superior de Física y Matemáticas
del I.P.N.

Gabriel D. Villa Salvador
Departamento de Control Automático
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados
del I.P.N.

Contenido

Prefacio

El cálculo infinitesimal de varias variables reales es un tema de particular relevancia en las áreas de ingeniería y de ciencias físico–matemáticas.

El presente volumen trata sobre el cálculo diferencial de varias variables reales. Hay muchas formas de presentar el material aquí tratado. Nosotros elegimos un punto de vista teórico, aunque sin descuidar ejemplos que ilustren nuestros resultados. Debido a lo anterior, la aproximación al cálculo integral aquí presentada hace adecuado este texto para los estudiantes del segundo ó tercer año de licenciatura en las carreras de física y/ó matemáticas.

En el Capítulo 1 etudiamos el espacio $\mathbb{R}^n$ como espacio euclideano. Posteriormente vemos las propiedades fundamentales de funciones norma y métricas en $\mathbb{R}^n$.

En los Capítulos 2 y 3 estudiamos la topología de $\mathbb{R}^n$.

El Capítulo 4 trata fundamentalmente sobre las funciones definidas sobre $\mathbb{R}^n$.

El Capítulo 5 es sobre derivadas y diferenciales en varias variable.

En el Capítulo 6 tratamos sobre el Teorema de Taylor y sus aplicaciones.

El último capítulo es funciones inversas y funciones implícitas.

Finalizamos con un apéndice en el cual se presenta la demostración de la desigualdad de Minkowski.

Al final de cada capítulo proponemos una lista de ejercicios los cuales complementan y aclaran lo tratado en el texto. Se debe intentar resolver todos ellos.

Las referencias principales para este libro son [7] para funciones continuas y cálculo diferencial. La referencia [2] para funciones continuas y topología de $\mathbb{R}^n$. La refencia [6] abarca de hecho todos los temas.

Los requisitos que se necesitan para este libro son principalmente un conocimiento general de cálculo diferencial e integral de una variable real.

Gabriel Villa Salvador.
México, D.F.
Julio de 2003.

Capítulo 1

El espacio $\mathbb{R}^n$.

1.1 $\mathbb{R}^n$ como espacio euclideano

Definición 1.1.1 Definimos el espacio n-dimensional sobre los reales por:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n\}.$$

Se define la *suma* en $\mathbb{R}^n$ por:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n),$$
$$(+ \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad +(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x} + \vec{y})$$

y el *producto por escalar* por:

$$\alpha(x_1, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n),$$
$$(\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \quad \cdot(\alpha, \vec{x}) = \alpha\vec{x}).$$

donde $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n), \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}$.

Teorema 1.1.2 *$\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión n.*

Demostración. Ejercicio. ❏

Definición 1.1.3 Dados $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n), \vec{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ se define el *producto interno o escalar de $\vec{x}$ y $\vec{y}$* por:

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$
$$(\langle -, - \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}).$$

Ejemplo 1.1.4 Si $n = 3, \vec{x} = (1, -2, 4), \vec{y} = (3, -2, -1)$, entonces

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = (1)(3) + (-2)(-2) + 4(-1) = 3 + 4 - 4 = 3.$$

Notemos que $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ puede ser 0 sin que $\vec{x}$ y $\vec{y}$ sean $\vec{0}$ (por ejemplo: $\vec{x} = (1, 2, 3), \vec{y} = (2, 1, -4/3), \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = (1)(2) + (2)(1) + 3(-4/3) = 2 + 2 - 4 = 0$).

Definición 1.1.5 Dos vectores $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ se dicen *ortogonales o perpendiculares* si $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$.

Definición 1.1.6 Sea $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Se define la *norma euclideana* de $\vec{x}$ por:
$\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} = [x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2]^{1/2} = \left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right]^{1/2}$

Ejemplo 1.1.7 Si $\vec{x} = (1, -3, 4), \|\vec{x}\| = \sqrt{(1)^2 + (-3)^2 + (4)^2} = \sqrt{1 + 9 + 16} = \sqrt{26}$.

Observación 1.1.8 Consideremos $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3), \vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ vectores en $\mathbb{R}^3$. Para obtener el ángulo θ que forman $\vec{x}$ y $\vec{y}$ aplicamos la Ley de los Cosenos: $\|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 - 2\|\vec{x}\|\|\vec{y}\| \cos\theta$. Por lo tanto

$$\cos\theta = \frac{\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 - \|\vec{x} - \vec{y}\|^2}{2\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|} = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3}{\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|} = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|}.$$

Definición 1.1.9 Un vector $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ se llama *unitario* si $\|\vec{u}\| = 1$.

Dado $\vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{x} \neq \vec{0}, \dfrac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$ es el vector unitario con la misma dirección que $\vec{x}$.

Dos vectores $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ tienen la misma dirección si existe $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0$ tal que $\vec{x} = \lambda \vec{y}$ y tienen dirección contraria si existe $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda < 0$ tal que $\vec{x} = \lambda \vec{y}$.

Ejemplo 1.1.10 Si $\vec{a} = (1, 2, -3), \|\vec{a}\| = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}$, entonces $\vec{u} = \dfrac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{14}}, \dfrac{2}{\sqrt{14}}, \dfrac{-3}{\sqrt{14}} \right)$ es el vector unitario en la dirección de $\vec{a}$.

1.2 Propiedades de la norma y del producto interno.

En esta sección demostraremos las propiedades más importantes de la norma euclideana y del producto interno, resultados que nos serán de gran utilidad en el resto de este trabajo.

Teorema 1.2.1 *Sean* $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n), \vec{y} = (y_1, \ldots, y_n), \vec{z} = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ *y sea* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Entonces:*

i).- $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle$,

ii).- $\langle \vec{x}, \vec{y} + \vec{z} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle$,

iii).- $\langle \alpha\vec{x}, \vec{y} \rangle = \alpha\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle; \quad \langle \vec{x}, \alpha\vec{y} \rangle = \alpha\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$,

iv).- $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \geq 0$ *y se tiene* $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}$.

Demostración. i), ii), iii) se dejan como ejercicio.

iv).- $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \geq 0$.

Ahora, se tiene $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0 \iff x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 0 \iff x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}$. ❑

Teorema 1.2.2 *Sean* $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *y* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Entonces:*

i).- $\|\vec{x}\| \geq 0$ *y* $\|\vec{x}\| = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}$.

ii).- $\|\alpha\vec{x}\| = |\alpha|\|\vec{x}\|$.

Demostración.

i).- $\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} \geq 0$. Además $\|\vec{x}\| = 0 \iff \|\vec{x}\|^2 = 0 = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \iff \vec{x} = \vec{0}$.

ii).- $\|\alpha\vec{x}\| = \langle \alpha\vec{x}, \alpha\vec{x} \rangle^{1/2} = \{\alpha^2\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle\}^{1/2} = |\alpha|\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle^{1/2} = |\alpha|\|\vec{x}\|$. ❑

Teorema 1.2.3 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz) *Sean* $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, *entonces:*

$$|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \leq \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|.$$

Demostración. Si $\vec{x}$ o $\vec{y} = \vec{0}$ el resultado es inmediato. Sean $\vec{x} \neq \vec{0} \neq \vec{y}$.

Definamos $\vec{z} = \|\vec{x}\|\vec{y} - \|\vec{y}\|\vec{x}$. Entonces:

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle \vec{z}, \vec{z} \rangle &= \langle \|\vec{x}\|\vec{y} - \|\vec{y}\|\vec{x}, \|\vec{x}\|\vec{y} - \|\vec{y}\|\vec{x} \rangle = \\ &= \|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2 - 2\|\vec{x}\|\vec{y}\|\langle \vec{y}, \vec{x} \rangle + \|\vec{y}\|^2\|\vec{x}\|^2 = \\ &= 2\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|\{\|\vec{x}\|\|\vec{y}\| - \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle\}. \end{aligned}$$

Puesto que $2\|\vec{x}\|\|\vec{y}\| > 0$ se tiene que $\|\vec{x}\|\|\vec{y}\| - \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle \geq 0$. Por lo tanto $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \leq \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|$.

Ahora $-\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle -\vec{x}, \vec{y} \rangle \leq \|-\vec{x}\|\|\vec{y}\| = \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|$, de donde $|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \leq \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|$. ❑

Corolario 1.2.4 *Se tiene que* $|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| = \|\vec{x}\|\|\vec{y}\| \iff \vec{x}$ *and* $\vec{y}$ *son linealmente dependientes.*

<u>*Demostración*</u>.
<u>$\Rightarrow$)</u> Si $\vec{y} = \vec{0}$ el resultado es inmediato. Sea $\vec{y} \neq \vec{0}$. Puesto que $|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$ se tiene que $\pm\langle x, y \rangle = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$.

Si $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$, entonces si $\vec{z} = \|\vec{x}\| \vec{y} - \|\vec{y}\| \vec{x}$ se tiene que $\langle \vec{z}, \vec{z} \rangle = 0$ por lo que $\vec{z} = \vec{0} = \|\vec{x}\| \vec{y} - \|\vec{y}\| \vec{x}$, es decir $\vec{x}$ y $\vec{y}$ son linealmente dependientes.

Si $-\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| = \| - \vec{x}\| \|\vec{y}\|$ se tiene $\langle -\vec{x}, \vec{y} \rangle = \| - \vec{x}\| \|\vec{y}\|$ de donde $-\vec{x}$ y $\vec{y}$ son linealmente dependientes. Por tanto $\vec{x}$ y $\vec{y}$ son linealmente dependientes
<u>$\Leftarrow$)</u> Sea ahora $\vec{x} = \lambda \vec{y}, \lambda \in \mathbb{R}$. Entonces

$$|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| = |\langle \lambda \vec{y}, \vec{y} \rangle\| = |\lambda| \|\vec{y}\|^2 = \|\lambda \vec{y}\| \|\vec{y}\| = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|.$$ ❑

Teorema 1.2.5 (Desigualdad del Triángulo) *Sean $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$. Entonces*

$$\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|.$$

<u>*Demostración*</u>. Se tiene que

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle + 2\langle x, \vec{y} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle \leq$$
$$\leq \|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{x}\| \|\vec{y}\| + \|\vec{y}\|^2 = (\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2.$$

Por lo tanto $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$. ❑

Definición 1.2.6 Sean $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$. Se define la *distancia euclideana* entre $\vec{x}$ y $\vec{y}$ por: distancia entre $\vec{x}$ y $\vec{y} := d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|$.

Esta distancia cumple todas las propiedades geométricas a las que estamos acostumbrados, como lo prueba el siguiente:

Teorema 1.2.7 *Sean $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$, entonces:*

i).- $d(\vec{x}, \vec{y}) = d(\vec{y}, \vec{x})$.

ii).- $d(\vec{x}, \vec{y}) \geq 0$.

iii).- $d(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \iff \vec{x} = \vec{y}$.

iv).- $d(\vec{x}, \vec{y}) \leq d(\vec{x}, \vec{z}) + d(\vec{z}, \vec{y})$ *(desigualdad del triángulo).*

<u>*Demostración*</u>.

i).- $d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\| = \| - (\vec{x} - \vec{y})\| = \|\vec{y} - \vec{x}\| = d(\vec{y}, \vec{x})$.

ii).- $d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\| \geq 0$.

iii).- $d(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \iff \|\vec{x} - \vec{y}\| = 0 \iff \vec{x} - \vec{y} = \vec{0} \iff \vec{x} = \vec{y}$.

iv).- $d(\vec{x},\vec{y}) = \|\vec{x}-\vec{y}\| = \|\vec{x}-\vec{z}+\vec{z}-\vec{y}\| \leq \|\vec{x}-\vec{z}\| + \|\vec{z}-\vec{y}\| = d(\vec{x},\vec{z}) + d(\vec{z},\vec{y})$. ❑

Lo que sigue a continuación nos da una justificación de la definición de perpendicularidad.

Dados 2 vectores $\vec{a},\vec{b}$, la condición $\|\vec{a}+\vec{b}\| = \|\vec{a}-\vec{b}\|$ coincide con la propiedad geométrica de que $\vec{a}$ sea perpendicular a $\vec{b}$.

Por otro lado tendremos:

$$\|\vec{a}-\vec{b}\| = \|\vec{a}+\vec{b}\| \iff \langle \vec{a}-\vec{b},\vec{a}-\vec{b}\rangle = \|\vec{a}-\vec{b}\|^2 = \|\vec{a}+\vec{b}\|^2 = \langle \vec{a}+\vec{b},\vec{a}+\vec{b}\rangle \iff$$
$$\iff \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\langle \vec{a},\vec{b}\rangle = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + 2\langle \vec{a},\vec{b}\rangle \iff 4\langle \vec{a},\vec{b}\rangle = 0 \iff \langle \vec{a},\vec{b}\rangle = 0.$$

Usando la noción de perpendicularidad derivamos la noción de proyección como muestra la siguiente figura:

Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores en $\mathbb{R}^n, \vec{b} \neq 0$. Queremos definir la proyección de $\vec{a}$ a lo largo de $\vec{b}$, el cual será el vector $\vec{p}$ que aparece en la figura. Se tiene que $\vec{p} = \lambda\vec{b}$ y $\vec{a}-\vec{p}$ es perpendicular a $\vec{b}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$. Por tanto $\langle \vec{a}-\vec{p},\vec{b}\rangle = \langle \vec{a}-\lambda\vec{b},\vec{b}\rangle = \langle \vec{a},\vec{b}\rangle - \lambda\langle \vec{b},\vec{b}\rangle$. se sigue que $\lambda = \dfrac{\langle \vec{a},\vec{b}\rangle}{\|\vec{b}\|^2}$.

El número λ se llama *la componente de $\vec{a}$ a lo largo de $\vec{b}$* y $\vec{p} = \lambda\vec{b}$ se llama la *proyección de $\vec{a}$ a lo largo de $\vec{b}$.*

Ejemplo 1.2.8 Sean $\vec{a} = (1,2,-3)$ y $\vec{b} = (1,1,2)$, entonces la componente de $\vec{a}$ a lo largo de $\vec{b}$ es $\lambda = \dfrac{\langle \vec{a},\vec{b}\rangle}{\|\vec{b}\|^2} = \dfrac{1+2-6}{1+1+4} = -\dfrac{3}{6} = -\dfrac{1}{2}$ y la proyección de $\vec{a}$ a lo largo de $\vec{b}$ será $\vec{p} = \lambda\vec{b} = \left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, -1\right)$.

La proyección de un vector en otro nos sirve para definir la noción de ángulo entre 2 vectores. Dados $\vec{x},\vec{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$, tenemos, por la desigualdad de Schwarz: $\left|\dfrac{\langle \vec{x},\vec{y}\rangle}{\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|}\right| \leq 1$ o, equivalentemente, $-1 \leq \dfrac{\langle \vec{x},\vec{y}\rangle}{\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|} \leq 1$. Por lo tanto existe un único $\theta \in [0,\pi]$ tal que $\cos\theta = \dfrac{\langle \vec{x},\vec{y}\rangle}{\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|}$. El número θ se llama el *ángulo que forman los vectores $\vec{x}$ y $\vec{y}$.*

Geométricamente se tendrá:

θ ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$: $\cos\theta = \dfrac{\lambda\|\vec{b}\|}{\|\vec{a}\|} = \dfrac{\langle \vec{a},\vec{b}\rangle}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|}$.

Terminamos esta seccón con un resultado que nos será de gran utilidad cuando veamos la equivalencia de normas.

Teorema 1.2.9 *Sea $\vec{x} = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$. Entonces:*

$$|x_i| \leq \|\vec{x}\| \leq \sqrt{n}\sup\{|x_1|,|x_2|,\ldots,|x_n|\}, \quad i = 1,2,\ldots,n.$$

<u>*Demostración*</u>. Se tiene que

$$|x_i| = \sqrt{x_i^2} \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} = \|\vec{x}\|, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Por otro lado sea $M = \sup\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$. Entonces $|x_i| \leq M, i = 1, 2, \ldots, n$, por lo que $\|\vec{x}\|^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq M^2 + \cdots + M^2 = nM^2$, de donde $\|\vec{x}\| \leq \sqrt{n} \cdot M$. ❑

1.3 Normas y métricas en $\mathbb{R}^n$.

En esta sección generalizamos los conceptos de norma y de distancia entre puntos de $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.3.1 Una *norma* sobre $\mathbb{R}^n$ es una función $\mathcal{N} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que satisface las siguientes propiedades:

i).- $\mathcal{N}(\vec{x}) \geq 0$ para toda $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

ii).- $\mathcal{N}(\alpha\vec{x}) = |\alpha|\mathcal{N}(\vec{x})$ para toda $\vec{x} \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}$.

iii).- $\mathcal{N}(\vec{x}) = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}$.

iv).- $\mathcal{N}(\vec{x}+\vec{y}) \leq \mathcal{N}(\vec{x})+\mathcal{N}(\vec{y})$ para toda $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ (desigualdad del triángulo).

Como consecuencia de ii) se tendrá: $\mathcal{N}(-\vec{x}) = \mathcal{N}(\vec{x})$ para toda $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.
De iii) se sigue la muy importante desigualdad:

$$|\mathcal{N}(\vec{x}) - \mathcal{N}(\vec{y})| \leq \mathcal{N}(\vec{x} - \vec{y}) \quad \text{para cualesquiera} \quad \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n.$$

En efecto: $\mathcal{N}(\vec{x}) = \mathcal{N}(\vec{x} - \vec{y} + \vec{y}) \leq \mathcal{N}(\vec{x} - \vec{y}) + \mathcal{N}(\vec{y})$, por lo que

$$\mathcal{N}(\vec{y}) = \mathcal{N}(\vec{y} - \vec{x} + \vec{x}) \leq \mathcal{N}(\vec{y} - \vec{x}) + \mathcal{N}(\vec{x}) = \mathcal{N}(\vec{x} - \vec{y}) + \mathcal{N}(\vec{x}).$$

Se sigue que $\mathcal{N}(\vec{x}) - \mathcal{N}(\vec{y}) \leq \mathcal{N}(\vec{x} - \vec{y})$ y $\mathcal{N}(\vec{y}) - \mathcal{N}(\vec{x}) \leq \mathcal{N}(\vec{x} - \vec{y})$, lo cual implica que $|\mathcal{N}(\vec{x}) - \mathcal{N}(\vec{y})| \leq \mathcal{N}(\vec{x} - \vec{y})$.

Ejemplos 1.3.2

(1).- Sea $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Se define la *norma uno* por: $\mathcal{N}(\vec{x}) = \|\vec{x}\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$.

Verifiquemos que $\| \quad \|_1$ es una norma.

i).- $\|\vec{x}\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| \geq 0$ para toda $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

ii).- $\|\alpha\vec{x}\|_1 = \|(\alpha\vec{x}_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)\|_1 = |\alpha x_1| + |\alpha x_2| + \ldots + |\alpha x_n| = |\alpha|\{|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|\} = |\alpha|\|\vec{x}\|_1$ para cualesquiera $\vec{x} \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}$.

iii).- $\|\vec{x}\|_1 = 0 \iff |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| = 0 \iff |x_1| = \cdots = |x_n| = 0 \iff x_1 = \ldots = x_n = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}$.

iv).-

$$\begin{aligned}\|\vec{x}+\vec{y}\|_1 &= \|(x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n)\|_1 = \\ &= |x_1+y_1| + |x_2+y_2| + \cdots + |x_n+y_n| \leq \\ &\leq (|x_1|+|y_1|) + (|x_2|+|y_2|) + \cdots + (|x_n|+|y_n|) = \\ &= (|x_1| + \cdots + |x_n|) + (|y_1| + \cdots + |y_n|) = \|\vec{x}\|_1 + \|\vec{y}\|_1.\end{aligned}$$

(2).- Sea $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Se define la *norma infinita* por: $\mathcal{N}(\vec{x}) := \|\vec{x}\|_\infty = \sup\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$.

Verifiquemos que $\| \quad \|_\infty$ es una norma en $\mathbb{R}^n$.

i).- $\|\vec{x}\|_\infty = \sup\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} \geq 0$ por toda $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

ii).- Se tiene para toda $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ y para toda $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\|\alpha\vec{x}\|_\infty &= \sup\{|\alpha x_1|, \ldots, |\alpha x_n|\} = \sup\{|\alpha||x_1|, \ldots, |\alpha||x_n|\} = \\ &= |\alpha| \sup\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} = |\alpha|\|\vec{x}\|_\infty.\end{aligned}$$

iii).- $\|\vec{x}\|_\infty = 0 \iff \sup\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} = 0 \iff |x_i| = 0, 1 \leq i \leq n \iff x_i = 0, 1 \leq i \leq n \iff \vec{x} = \vec{0}$.

iv).-

$$\begin{aligned}\|\vec{x}+\vec{y}\|_\infty &= \sup\{|x_1+y_1|, \ldots, |x_n+y_n|\} \leq \\ &\leq \sup\{|x_n|+|y_1|, \ldots, |x_n|+|y_n|\} \leq \\ &\leq \sup\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} + \sup\{|y_1|, \ldots, |y_n|\} = \|\vec{x}\|_\infty + \|\vec{y}\|_\infty.\end{aligned}$$

(3).- En general, sea $1 \leq p < \infty$. Se define *la norma p* sobre $\mathbb{R}^n$ por:

$$\mathcal{N}_p(\vec{x}) = \|\vec{x}\|_p = \left\{\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right\}^{1/p},$$

donde $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. Se pueden verificar fácilmente las propiedades i), ii) y iii), sin embargo la desigualdad $\|\vec{x}+\vec{y}\|_p \leq \|\vec{x}\|_p + \|\vec{y}\|_p$ es más difícil y se llama la *desigualdad de Minkowski*. En el apéndice damos la demostración de esta desigualdad.

Con $p = 1$ se tiene la norma uno y con $p = 2$ se tiene la norma euclideana:

$$\|\vec{x}\| = \|\vec{x}\|_2 = \left\{\sum_{i=1}^n x_i^2\right\}^{1/2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

La última desigualdad probada en la sección anterior:

$$|x_i| \leq \|\vec{x}\| \leq \sqrt{n}\sup\{|x_1|, \ldots, |x_n|\},$$

$1 \leq i \leq n$ y $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nos dice que:

$$\|\vec{x}\|_\infty \leq \|\vec{x}\| \leq \sqrt{n}\|\vec{x}\|_\infty.$$

Más generalmente se tiene:

Proposición 1.3.3 *Para $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y para toda $1 \leq p < \infty$ se tiene:*

$$\|\vec{x}\|_\infty \leq \|\vec{x}\|_p \leq n^{1/p}\|\vec{x}\|_\infty.$$

Demostración. Sean $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $|x_j| = \sup\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} = \|\vec{x}\|_\infty$.

Entonces: $|x_j|^p = \|\vec{x}\|_\infty^p \leq \sum_{i=1}^n |x_i|^p = \|\vec{x}\|_p^p$. Por lo tanto

$$\|\vec{x}\|_\infty \leq \|\vec{x}\|_p = \left\{\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right\}^{1/p} \leq \left\{\sum_{i=1}^n |x_j|^p\right\}^{1/p} = \{n|x_j|^p\}^{1/p} = n^{1/p}|x_j| = n^{1/p}\|\vec{x}\|_\infty.$$

Se sigue que $\|\vec{x}\|_\infty \leq \|\vec{x}\|_p \leq n^{1/p}\|\vec{x}\|_\infty$. ❑

Corolario 1.3.4 *Dado $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ se tiene que $\lim_{p\to\infty} \|\vec{x}\|_p = \|\vec{x}\|_\infty$.*

Demostración. Las funciones $f\colon [1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ y $g\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = n^x$ son continuas asi que $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x}\right) = n^{1/x}$ es continua. Por tanto

$$\lim_{p\to\infty}(n^{1/p}) = \lim_{p\to\infty}((g \circ f)(p)) = g\left(\lim_{p\to\infty} f(p)\right) = g(0) = n^0 = 1.$$

Por tanto

$$\begin{array}{ccccc} \|\vec{x}\|_\infty \leq & \|\vec{x}\|_p \leq & n^{1/p}\|\vec{x}\|_\infty \\ \Big\downarrow {\scriptstyle p\to\infty} & & \Big\downarrow {\scriptstyle p\to\infty} \\ \|\vec{x}\|_\infty & & \|\vec{x}\|_\infty \end{array}$$

Se sigue que $\lim_{p\to\infty} \|\vec{x}\|_p = \|\vec{x}\|_\infty$. ❑

Ahora veamos geométricamente el significado de $\| \ \|$, $\| \ \|_1$ y $\| \ \|_\infty$.

Sean:

$$\begin{aligned}\overline{B}(\vec{0},1) &= \{\vec{x}\in\mathbb{R}^n \mid \|\vec{x}\|\le 1\},\\ \overline{B}_1(\vec{0},1) &= \{\vec{x}\in\mathbb{R}^n \mid \|\vec{x}\|_1\le 1\},\\ \overline{B}_\infty(\vec{0},1) &= \{\vec{x}\in\mathbb{R}^n \mid \|\vec{x}\|_\infty\le 1\}.\end{aligned}$$

En el caso $n=2$, geométricamente estos conjuntos son:

$\overline{B}(\vec{0},1) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 1\}$. $\overline{B}_1(\vec{0},1) = \{x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|+|y|\le 1\}$. $B_\infty(\vec{0},1) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \max\{|x|,|y|\}\le 1\}$.

Sea $\mathcal{N}(\vec{x})$ una norma arbitraria sobre $\mathbb{R}^n$. Sea $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Existe $M>0$ tal que $\mathcal{N}(\vec{e}_i)\le M$ para toda $1\le i\le n$.

Sea $\vec{x}=\sum_{i=1}^{n} x_i\vec{e}_i\in\mathbb{R}^n$. Por la desigualdad del triángulo se tiene que

$$\mathcal{N}(\vec{x}) = \mathcal{N}(\sum_{i=1}^{n} x_i\vec{e}_i) \le \sum_{i=1}^{n}\mathcal{N}(x_i\vec{e}_i) = \sum_{i=1}^{n}|x_i|\mathcal{N}(\vec{e}_i) \le M\left[\sum_{i=1}^{n}|x_i|\right] = M\|\vec{x}\|_1.$$

Más adelante se probará que existe $\alpha>0$ tal que $\alpha\|\vec{x}\|_1\le\mathcal{N}(\vec{x})$. Por tanto existen $\alpha>0, \beta>0$ con $\beta=M$, tales que

$$\alpha\|\vec{x}\|_1\le\mathcal{N}(\vec{x})\le\beta\|\vec{x}\|_1 \quad \text{para toda} \quad \vec{x}\in\mathbb{R}^n.$$

De estas desigualdades tendremos el siguiente teorema que establece que cualesquiera 2 normas en $\mathbb{R}^n$ son equivalentes.

Teorema 1.3.5 *Sean $\mathcal{N}$ y $\mathcal{N}_1$ dos normas cualesquiera sobre $\mathbb{R}^n$. Entonces existen $\alpha>0,\beta>0$ tales que $\alpha\mathcal{N}(\vec{x})\le\mathcal{N}_1(\vec{x})\le\beta\mathcal{N}(\vec{x})$ para toda $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Existen $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2>0$ tales que:

$$\alpha_1\|\vec{x}\|_1\le\mathcal{N}(\vec{x})\le\beta_1\|\vec{x}\|_1 \qquad \alpha_2\|\vec{x}\|_1\le\mathcal{N}_1(\vec{x})\le\beta_2\|\vec{x}\|_1$$

para toda $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$. Entonces

$$\mathcal{N}_1(\vec{x})\le\beta_2\|\vec{x}\|_1\le\frac{\beta_2}{\alpha_1}\mathcal{N}(\vec{x}), \qquad \mathcal{N}_1(\vec{x})\ge\alpha_2\|\vec{x}\|_1\ge\frac{\alpha_2}{\beta_1}\mathcal{N}(\vec{x}).$$

Sean $\beta=\frac{\beta_2}{\alpha_1}>0$ y $\alpha=\frac{\alpha_2}{\beta_1}>0$. Entonces $\alpha\mathcal{N}(\vec{x})\le\mathcal{N}_1(\vec{x})\le\beta\mathcal{N}(\vec{x})$. ❑

Definición 1.3.6 Una *métrica o distancia* sobre $\mathbb{R}^n$ es una función $\rho:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que satisface:

i).- $\rho(\vec{x},\vec{y})\ge 0$ para toda $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n$.

ii).- $\rho(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \iff \vec{x} = \vec{y}$.

iii).- $\rho(\vec{x}, \vec{y}) = \rho(\vec{y}, \vec{x})$ para toda $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$.

iv).- $\rho(\vec{x}, \vec{y}) \leq \rho(\vec{x}, \vec{z}) + \rho(\vec{z}, \vec{y})$ para toda $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$.

La propiedad iv) se llama la *desigualdad del triángulo*.

Ejemplos 1.3.7

(1).- Sea $\mathcal{N}$ una norma sobre $\mathbb{R}^n$. Entonces: $\rho(\vec{x}, \vec{y}) = \mathcal{N}(\vec{x} - \vec{y})$ es una métrica sobre $\mathbb{R}^n$. La demostración se deja como ejercicio.

(2).- Sea

$$\rho(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \vec{x} \neq \vec{y} \\ 0 & \text{si} \quad \vec{x} = \vec{y}. \end{cases}$$

Entonces ρ es una métrica sobre $\mathbb{R}^n$ (ejercicio). La métrica ρ se llama la *métrica discreta*.

1.4 Ejercicios

1) Considere las siguientes parejas de vectores:

i).- $\vec{a} = (2, -1)$, $\vec{b} = (-1, 1)$;

ii).- $\vec{a} = (-1, 3)$, $\vec{b} = (0, 4)$;

iii).- $\vec{a} = (2, -1, 5)$, $\vec{b} = (-1, 1, 1)$;

iv).- $\vec{a} = (-1, -2, 3)$, $\vec{b} = (-1, 3, -4)$;

v).- $\vec{a} = (\pi, 3, -1)$, $\vec{b} = (2\pi, -3, 7)$;

vi).- $\vec{a} = (15, -2, 4)$, $\vec{b} = (\pi, 3, -1)$.

a) Encontrar $\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}, 3\vec{a}$ y $-2\vec{b}$.

b) Hacer un dibujo en donde aparezcan los vectores: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{a} + 3\vec{b}$, $\vec{a} - 2\vec{b}$, $\vec{a} - 3\vec{b}$ y $\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$.

c) Calcular $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle$, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$, la longitud de $\vec{a}$ y de $\vec{b}$.

2) Usando solamente las cuatro propiedades del producto escalar verificar las igualdades:

$$\begin{aligned} \langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + \vec{b} \rangle &= \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle + 2\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle, \\ \langle \vec{a} - \vec{b}, \vec{a} - \vec{b} \rangle &= \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle - 2\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle. \end{aligned}$$

3) ¿Cuales, de las siguientes parejas de vectores, son perpendiculares?

   i).- $(1,-1,1)$ y $(2,5,1)$;

   ii).- $(1,-1,1)$ y $(2,3,1)$;

   iii).- $(-5,2,7)$ y $(3,-1,2)$;

   iv).- $(\pi,2,1)$ y $(2,-\pi,0)$.

4) Sea $\vec{a}$ un vector ortogonal a todo vector $\vec{x}$ en $\mathbb{R}^n$. Mostrar que $\vec{a}=\vec{0}$.

5) Considerar nuevamente las parejas de vectores del Ejercicio 1.

   i).- Hallar la proyección de $\vec{a}$ a lo largo de $\vec{b}$ y la proyección de $\vec{b}$ a lo largo $\vec{a}$.

   ii).- Hallar el ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

6) Sean $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_r$ vectores diferentes de cero, mutuamente ortogonales, es decir, $\langle\vec{a}_i,\vec{a}_j\rangle=0$ si $i\neq j$. Sean $c_1,\ldots,c_r\in\mathbb{R}$ tales que $c_1\vec{a}_1+\ldots+c_r\vec{a}_r=\vec{0}$. Mostrar que $c_i=0, 1\leq i\leq r$, es decir $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_r$ son linealmente independientes.

7) Sean $\vec{a},\vec{b}\in\mathbb{R}^n\setminus\{\vec{0}\}$ y sea θ el ángulo entre ellos.

   i).- Probar que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tienen la misma dirección $\iff \cos\theta=1$.

   ii).- Probar que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tienen dirección opuesta $\iff \cos\theta=-1$.

8) Sea $d(\vec{x},\vec{y})=\|\vec{x}-\vec{y}\|$ la distancia entre $\vec{x}$ y $\vec{y}, \vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n$. Probar:

   i).- $d(\vec{x},\vec{y})\geq 0$ y $d(\vec{x},\vec{y})=0 \iff \vec{x}=\vec{y}$.

   ii).- $d(\vec{a},\vec{b})=d(\vec{b},\vec{a})$ para cualesquiera $\vec{a},\vec{b}\in\mathbb{R}^n$.

   iii).- $d(\vec{x},\vec{y})\leq d(\vec{x},\vec{z})+d(\vec{z},\vec{y})$ para cualesquiera $\vec{x},\vec{y},\vec{z}\in\mathbb{R}^n$.

9) Demostrar las siguientes relaciones:

   i).- $\|\vec{x}+\vec{y}\|^2+\|\vec{x}-\vec{y}\|^2=2(\|\vec{x}\|^2+\|\vec{y}\|^2)$ (Ley del paralelogramo).

   ii).- $\|\vec{x}+\vec{y}\|\|\vec{x}-\vec{y}\|\leq\|\vec{x}\|^2+\|\vec{y}\|^2$.
   Sugerencia: Usar i).

   iii).- $4\langle\vec{x},\vec{y}\rangle=\|\vec{x}+\vec{y}\|^2-\|\vec{x}-\vec{y}\|^2$ (Identidad de polarización).

   iv).- Si θ es el ángulo entre $\vec{x}$ y $\vec{y}$, entonces:

$$\|\vec{x}-\vec{y}\|^2=\|\vec{x}\|^2+\|\vec{y}\|^2-2\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|\cos\theta.$$

   Interpretar geométricamente los incisos i) y ii).

10) Calcular la distancia y el ángulo entre los vectores:

    i).- $(3, 2, 2)$ y $(0, 1, 0)$;

    ii).- $(1, 0, 1, 1)$ y $(-1, 2, 0, 0)$.

11) Sean $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$. Mostrar que si $\vec{x}$ y $\vec{y}$ son ortogonales, entonces:

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 \quad \text{(Teorema de Pitágoras).}$$

12) i).- Probar que $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\|\|\vec{y}\| \iff$ existe $\lambda \geq$ tal que $\vec{x} = \lambda\vec{y}$ o $\lambda\vec{x} = \vec{y}$.

    ii).- Deducir que $\|\vec{x} + \vec{y}\| = \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\| \iff$ existe $\lambda \geq 0$ tal que $\vec{x} = \lambda\vec{y}$ o $\lambda\vec{x} = \vec{y}$.

    Dar una interpretación geométrica de estos resultados.

13) Sean $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ en $\mathbb{R}^n$. Mostrar que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son ortogonales $\iff \|\vec{a} + \lambda\vec{b}\| \geq \|\vec{a}\|$ para toda $\lambda \in \mathbb{R}$. Interpretar geométricamente este resultado.

14) Sean $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ y considerar el triángulo cuyos vértices se muestran en la figura.

    Deducir que el área del triángulo está dada por: $A = \frac{1}{2}\|\vec{a} - \vec{c}\|\|\vec{a} - \vec{b}\| \operatorname{sen}\theta$. ¿Como se calcularía $\cos\theta$, $\cos\varphi$ y $\cos\psi$?

15) Considerar el espacio vectorial de las funciones continuas en el intervalo $[-1, 1]$. Se define el producto escalar de las funciones f, g en el espacio como:

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{+1} f(x)g(x)dx.$$

    Verificar las cuatro propiedades que debe tener un producto escalar:

    i).- $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$;

    ii).- $\langle f, g + h \rangle = \langle f, g \rangle + \langle f, h \rangle$;

    iii).- $\langle \lambda f, g \rangle = \lambda\langle f, g \rangle = \langle f, \lambda g \rangle, \lambda \in \mathbb{R}$;

    iv).- $\langle f, f \rangle \geq 0$ y $\langle f, f \rangle = 0 \iff f = 0$.

    Si $f(x) = x$ y $g(x) = x^2$, calcular $\langle f, f \rangle, \langle g, g \rangle$ y $\langle f, g \rangle$.

    Encontrar la proyección de f a lo largo de g y la proyección de g a lo largo de f. Por último, calcular la norma de la función constante 1.

16) Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrables. Demostrar la desigualdad:

$$\left| \int_a^b fg \right| \leq \left[\int_a^b f^2 \right]^{1/2} \left[\int_a^b g^2 \right]^{1/2}.$$

Sugerencia: Imitar la demostración de la desigualdad de Cauchy-Schwarz con $h = \left[\int_a^b f^2 \right]^{1/2} g - \left[\int_a^b g^2 \right]^{1/2} f$.

17) Probar que para toda $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$:

$$|\|\vec{x}\| - \|\vec{y}\|| \leq \|\vec{x} - \vec{y}\| \quad \text{y que} \quad |\|\vec{x}\| - \|\vec{y}\|| \leq \|\vec{x} + \vec{y}\|.$$

18) Una transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se dice que preserva normas si $\|T\vec{x}\| = \|\vec{x}\|$ para toda $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ y que preserva el producto interior si $\langle T\vec{x}, T\vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ para toda $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$.

i).- Mostrar que T preserva normas $\iff$ T preserva producto interior.

ii).- Probar que si T preserva normas, entonces T es $1-1$ y T^{-1} también preserva normas.

iii).- Se dice que T preserva ángulos si T es $1 - 1$ y para $\vec{x}, \vec{y} \neq \vec{0}$, el ángulo entre $T\vec{x}$ y $T\vec{y}$ es igual al ángulo entre $\vec{x}$ y $\vec{y}$. Demostrar que si T preserva normas, entonces T preserva ángulos.

19) Sean $\vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{y} \in \mathbb{R}^m$. Mostrar que $\|(\vec{x}, \vec{y})\| = \sqrt{\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2}$, donde $(\vec{x}, \vec{y})$ se considera como un elemento de $\mathbb{R}^{n+m}$.

20) Si $0 \leq \theta < \pi$, sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal cuya matriz es: $\begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$. Demostrar que T preserva los ángulos y si $\vec{x} \neq \vec{0}$, entonces el ángulo entre $\vec{x}$ y $T\vec{x}$ es θ.

21) Sean $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$. Probar la desigualdad:

$$\left[\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^2 \right]^{1/2} \leq \left[\sum_{i=1}^n x_i^2 \right]^{1/2} + \left[\sum_{i=1}^n y_i^2 \right]^{1/2}.$$

22) Sea $\| \quad \|_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la norma uno : $\|\vec{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| = |x_1| + \cdots + |x_n|$. Probar que $\| \quad \|_1$ no satisface la identidad del paralelogramo, esto es, la igualdad:

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|_1^2 + \|\vec{x} - \vec{y}\|_1 = 2 \left[\|\vec{x}\|_1^2 + \|\vec{y}_1\|^2 \right]$$

no se cumple para todo $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$.

Repetir lo mismo con $\| \quad \|_\infty$ en lugar de $\| \quad \|_1$.

23) Graficar en $\mathbb{R}^3$ los conjuntos:

$$\begin{aligned} B_1(\vec{0},1) &= \{\vec{x}\in\mathbb{R}^3 \mid \|\vec{x}\|_1 < 1\}, \\ B(\vec{0},1) &= \{\vec{x}\in\mathbb{R}^3 \mid \|\vec{x}\| < 1\}, \\ B_\infty(\vec{0},1) &= \{\vec{x}\in\mathbb{R}^3 \mid \|\vec{x}\|_\infty < 1\}. \end{aligned}$$

24) Sean $\mathcal{N}_1$ y $\mathcal{N}_2$ dos normas sobre $\mathbb{R}^n$. Se dice que estas normas son *equivalentes* si existen $\alpha,\beta>0$ tales que

$$\alpha\mathcal{N}_2(\vec{x}) \le \mathcal{N}_1(\vec{x}) \le \beta\mathcal{N}_2(\vec{x}) \quad \text{para toda} \quad \vec{x}\in\mathbb{R}^n. \qquad (*)$$

Equivalentemente, $\alpha\mathcal{N}_1(\vec{x}) \le \mathcal{N}_2(\vec{x}) \le \beta\mathcal{N}_1(\vec{x})$ para toda $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$.

i).- Probar que $\| \quad \|$ y $\| \quad \|_\infty$ son equivalentes.

ii).- Probar que $\| \quad \|_1$ y $\| \quad \|_\infty$ son equivalentes.

iii).- Deducir de i) y ii) que $\| \quad \|$ y $\| \quad \|_1$ son equivalentes.

iv).- En los incisos i), ii) y iii), encontrar la mayor constante α y la menor constante β para que $(*)$ se verifique

Respuesta: i): $\alpha=1,\beta=\sqrt{n}$; ii) $\alpha=1,\beta=n$; iii) $\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ y $\beta=1$.

Las demostraciones deben hacerse sin usar el teorema que establece que todas las normas en $\mathbb{R}^n$ son equivalentes, sino hacerlo directamente.

25) ¿Son ó no son correctas las siguientes desigualdades?

i).- $|\langle\vec{x},\vec{y}\rangle| \le \|\vec{x}\|_1\|\vec{y}\|_1$;

ii).- $|\langle\vec{x},\vec{y}\rangle| \le \|\vec{x}\|_\infty\|\vec{y}\|_\infty$ para toda $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n$.

Justificar la respuesta.

26) Sea $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ una aplicación lineal. Demostrar que existe un número M positivo tal que: $\|T\vec{x}\| \le M\|\vec{x}\|$ para toda $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$.

27) Sea $\mathcal{N}$ una norma sobre $\mathbb{R}^n$. Probar que $\rho:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ dada por: $\rho(\vec{x},\vec{y}) = \mathcal{N}(\vec{x}-\vec{y})$ es una métrica sobre $\mathbb{R}^n$.

28) Sea $\rho:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ la función:

$$\rho(\vec{x},\vec{y}) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \vec{x}\neq\vec{y} \\ 0 & \text{si} \quad \vec{x}=\vec{y} \end{cases}.$$

Mostrar que ρ es una métrica en $\mathbb{R}^n$.

Capítulo 2

Topología de $\mathbb{R}^n$.

2.1 Conjuntos abiertos y cerrados.

A menos de especificar lo contrario, cuando se diga norma y métrica, se entenderán norma y métrica euclideanas respectivamente.

Definición 2.1.1 Sean $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y $\varepsilon > 0$. Se define la *bola abierta* de $\mathbb{R}^n$ con centro en $\vec{x}_0$ y radio ε por:

$$B(\vec{x}_0, \varepsilon) = V_\varepsilon(\vec{x}_0) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \varepsilon\}.$$

Ejemplos 2.1.2

(1).- <u>Sea $n = 1$</u>:

$$\begin{aligned} B(x_0, \varepsilon) &= \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \varepsilon\} = \{x \in \mathbb{R} \mid -\varepsilon < x - x_0 < \varepsilon\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon\} = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon). \end{aligned}$$

(2).- <u>Sea $n = 2$</u>

$$\begin{aligned} B((x_0, y_0), \varepsilon) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \varepsilon\} = \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varepsilon^2\}. \end{aligned}$$

(3) <u>Sea $n = 3$</u>:

$$B((x_0, y_0, z_0), \varepsilon) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < \varepsilon^2\}.$$

Definición 2.1.3 Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y sea $\vec{x}_0 \in A$. Entonces $\vec{x}_0$ se llama *punto interior* de A si existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(\vec{x}_0, \varepsilon) \subseteq A$. Así mismo definimos el *interior de A* por: $\mathring{A} =$ interior de $A = \{\vec{x} \in A \mid \vec{x}$ es punto interior de $A\}$.

Definición 2.1.4 $A \subseteq \mathbb{R}^n$ se llama *conjunto abierto en* $\mathbb{R}^n$ si $A = \overset{\circ}{A}$. En general se tiene: $\overset{\circ}{A} \subseteq A$. Por lo tanto A es abierto si para toda $\vec{x} \in A$, existe $\varepsilon_{\vec{x}} > 0$ tal que $B(\vec{x}, \varepsilon_{\vec{x}}) \subseteq A$.

Ejemplos 2.1.5

(1).- $\mathbb{R}^n$ es abierto en $\mathbb{R}^n$ pues dado $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, tomando $\varepsilon_{\vec{x}} = 1$ se tiene $B(\vec{x}, \varepsilon_{\vec{x}}) \subseteq \mathbb{R}^n$. Por lo tanto $\mathbb{R}^n$es abierto en $\mathbb{R}^n$.

(2).- Sea $m > n, m, n \in \mathbb{N}$. Se tiene que $\mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^m$ con la identificación $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ con $(x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^m$. Entonces $\mathbb{R}^n$ <u>no</u> es abierto en $\mathbb{R}^m$ pues dado $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$, se tiene que para toda $\varepsilon > 0$,

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n, \varepsilon/2, 0, \ldots, 0) \in B(\vec{x}, \varepsilon) \setminus \mathbb{R}^n,$$

es decir, $B(\vec{x}, \varepsilon) \nsubseteq \mathbb{R}^n$ para cualquier $\varepsilon > 0$.

(3).- (a, b) es abierto en $\mathbb{R}$ pues dado $x_0 \in (a, b)$, sea $\delta = \min\{x_0 - a, b - x_0\} > 0$.

Afirmamos que $B(x_0, \delta) \subseteq (a, b)$. En efecto, dado $y \in B(x_0, \delta)$, se tiene que $|y - x_0| < \delta$ por lo que $x_0 - \delta < y < x_0 + \delta$. Por lo tanto

$$a \leq x_0 - \delta < y < x_0 + \delta \leq b.$$

Se sigue que $a < y < b$ lo que implica que $y \in (a, b)$. Por lo tanto $B(x_0, \delta) \subseteq (a, b)$ y (a, b) es abierto en $\mathbb{R}$.

(4).- $[a, b]$ no es abierto en $\mathbb{R}$, pues $a \notin \overset{\circ}{\widehat{[a, b]}}$.

En efecto dada $\varepsilon > 0$, $a - \varepsilon/2 \notin [a, b]$ y $a - \varepsilon/2 \in B(a, \varepsilon)$. Por tanto $B(a, \varepsilon) \nsubseteq [a, b]$ y $[a, b]$ no es abierto en $\mathbb{R}$.

(5).- Sea $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y $\varepsilon > 0$. Entonces la bola abierta $B(\vec{x}_0, \varepsilon)$ en $\mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$ (esto justifica el nombre de bola abierta).

Sea $\vec{y}_0 \in B(\vec{x}_0, \varepsilon)$. Sea $\delta = \varepsilon - \|\vec{y}_0 - \vec{x}_0\| > 0$. Afirmamos que $B(\vec{y}_0, \delta) \subseteq B(\vec{x}_0, \varepsilon)$.

En efecto, sea $\vec{z} \in B(\vec{y}_0, \delta)$. Por lo tanto $\|\vec{z} - \vec{y}_0\| < \delta$ y

$$\|\vec{z} - \vec{x}_0\| = \|\vec{z} - \vec{y}_0 + \vec{y}_0 - \vec{x}_0\| \leq \|\vec{z} - \vec{y}_0\| + \|\vec{y}_0 - \vec{x}_0\| < \delta + \|\vec{y}_0 - \vec{x}_0\| = \varepsilon.$$

Entonces $\vec{z} \in B(\vec{x}_0, \varepsilon)$ y $B(\vec{y}_0, \delta) \subseteq B(\vec{x}_0, \varepsilon)$. Por lo tanto $B(\vec{x}_0, \varepsilon)$ es abierto en $\mathbb{R}^n$

(6).- $\emptyset \subseteq \mathbb{R}^n$ es abierto en $\mathbb{R}^n$.

1a. Forma: Si $\emptyset$ no fuese abierto en $\mathbb{R}^n$, existiría $\vec{x}_0 \in \emptyset$ con $\vec{x}_0 \notin \mathring{\emptyset}$. Esto es absurdo pues es imposible que exista $\vec{x}_0 \in \emptyset$. Por tanto $\emptyset$ es abierto.

2a. Forma: Todo conjunto que está contenido en el vacío es vacío y $\mathring{\emptyset} \subseteq \emptyset$. Obviamente tenemos que $\emptyset \subseteq \mathring{\emptyset}$. Por lo tanto $\emptyset = \mathring{\emptyset}$. Se sigue que $\emptyset$ es abierto.

(7).- Si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto finito entonces A no es abierto. En efecto, sea $A = \{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$.

Sean $\vec{x}_1 = (a_1, \ldots, a_n), \varepsilon > 0$. Consideremos, para $m \in \mathbb{N}$, el vector $\vec{y}_m = \left(a_1 + \dfrac{\varepsilon}{m}, a_2, \ldots, a_n\right)$.

Se tiene que si $m \neq k, \vec{y}_m \neq \vec{y}_k$. Por lo tanto $\{\vec{y}_m\}_{m=2}^{\infty}$ es un conjunto infinito y $\|\vec{y}_m - \vec{x}_1\| = \varepsilon/m < \varepsilon$ para toda $m \geq 2$. Se sigue que $\{\vec{y}_m\}_{m=2}^{\infty} \subseteq B(\vec{x}_1, \varepsilon)$. Por tanto $B(\vec{x}_1, \varepsilon)$ es un conjunto infinito, lo cual implica que $B(\vec{x}_1, \varepsilon) \nsubseteq A$. Así pues $\vec{x}_1$ no es punto interior de A y por tanto A no es un conjunto abierto.

(8).- Sean $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n, r > 0$ y $B(\vec{x}_0, r)$ la bola abierta en $\mathbb{R}^n$ con centro en $\vec{x}_0$ y radio r. Definimos el *exterior de* $B(\vec{x}_0, r)$ *por:*

$$\operatorname{Ext} B(\vec{x}_0, r) := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\vec{x} - \vec{x}_0\| > r\}.$$

Veamos que $\operatorname{Ext} B(\vec{x}_0, r)$ es un conjunto abierto. Sea $\vec{y} \in \operatorname{Ext} B(\vec{x}_0, r)$. Por lo tanto $\|\vec{y} - \vec{x}_0\| > r$. Sea $\delta = \|\vec{y} - \vec{x}_0\| - r > 0$.

Sea $\vec{z} \in B(\vec{y}, \delta)$. Por tanto $\|\vec{z} - \vec{y}\| < \delta = \|\vec{y} - \vec{x}_0\| - r$. Se sigue que

$$\begin{aligned} \|\vec{z} - \vec{x}_0\| = \|\vec{z} - \vec{y} + \vec{y} - \vec{x}_0\| \geq \|\vec{y} - \vec{x}_0\| - \|\vec{z} - \vec{y}\| > \\ > \|\vec{y} - \vec{x}_0\| - \|\vec{y} - \vec{x}_0\| + r = r \end{aligned}$$

y $\|\vec{z} - \vec{x}_0\| > r$. Por lo tanto $\vec{z} \in \operatorname{Ext} B(\vec{x}_0, r)$. Se sigue que $B(\vec{y}, \delta) \subseteq \operatorname{Ext} B(\vec{x}_0, r)$ y por tanto $\operatorname{Ext} B(\vec{x}_0, r)$ es un conjunto abierto.

Definición 2.1.6 Sea $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, Una *vecindad* de $\vec{x}_0$ es un conjunto V que contiene a otro conjunto abierto U tal que $\vec{x}_0 \in U$, es decir, $\vec{x}_0 \in U \subseteq V$ y U es un conjunto abierto.

Si V es un conjunto abierto y $\vec{x}_0 \in V$, V se llama *vecindad abierta.*

El siguiente teorema nos habla que las uniones arbitrarias y que las intersecciones finitas de conjuntos abiertos, son conjuntos abiertos. Lo anterior quiere decir que los conjuntos abiertos forman una *"topología"* de $\mathbb{R}^n$.

Teorema 2.1.7

i).- *$\emptyset$, $\mathbb{R}^n$ y $B(\vec{x}_0, \varepsilon) \subseteq \mathbb{R}^n$ para cualesquiera $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ son conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^n$.*

ii).- *La unión arbitraria de conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$.*

iii).- *La intersección de un número finito de conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^n$, es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$.*

Demostración.

i).- Ya se hizo en los ejemplos anteriores.

ii).- Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una colección de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ tal que A_α es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$ para toda $\alpha \in \Lambda$. Sea $A = \bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$.

Sea $\vec{x}_0 \in A$. Entonces existe un $\alpha \in \Lambda$ tal que $\vec{x}_0 \in A_\alpha$ y A_α es un conjunto abierto, por lo tanto existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(\vec{x}_0, \varepsilon) \subseteq A_\alpha \subseteq \bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha = A$. Por lo tanto A es abierto.

iii).- Sean $A_1, A_2, \ldots, A_k$ subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$. Sea $B = \bigcap\limits_{i=1}^{k} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k$.

Sea $\vec{x}_0 \in B$. Entonces $\vec{x}_0 \in A_i$ para toda $1 \le i \le k$. Cada A_i es un conjunto abierto. Por lo tanto existe $\varepsilon_i > 0$ tal que $B(\vec{x}_0, \varepsilon_i) \subseteq A_i$ para toda $1 \le i \le k$. Sea $\varepsilon = \min\limits_{1\le i\le n}\{\varepsilon_i\} = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n\} > 0$. Entonces $B(\vec{x}_0, \varepsilon) \subseteq B(\vec{x}_0, \varepsilon_i) \subseteq A_i$ para toda $1 \le i \le k$. Por lo tanto $B(\vec{x}_0, \varepsilon) \subseteq \bigcap\limits_{i=1}^{k} A_i = B$. Se sigue que B es un conjunto abierto. ❏

Observación 2.1.8 La intersección de una infinidad de conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^n$ no necesariamente es abierto en $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 2.1.9 Sea $H_n = \left(a - \dfrac{1}{n}, b + \dfrac{1}{n}\right)$ el cual es abierto en $\mathbb{R}$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Ahora: $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} H_n = [a, b]$ el cual no es un conjunto abierto en $\mathbb{R}$.

Definición 2.1.10 Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ se llama *cerrado en* $\mathbb{R}^n$ si $\mathbb{R}^n \setminus A = \mathcal{C}A$ es abierto en $\mathbb{R}^n$.

Ejemplos 2.1.11

(1).- $\emptyset \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathcal{C}\emptyset = \mathbb{R}^n$ el cual es abierto en $\mathbb{R}^n$. Por lo tanto $\emptyset$ es cerrado en $\mathbb{R}^n$.

(2).- $\mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathcal{C}\mathbb{R}^n = \emptyset$ el cual es abierto en $\mathbb{R}^n$. Por lo tanto $\mathbb{R}^n$ es cerrado en $\mathbb{R}^n$.

(3).- $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, $\mathcal{C}([a,b]) = (-\infty,a) \cup (b,\infty)$ el cual es un conjunto abierto de $\mathbb{R}$. Por lo tanto $[a,b]$ es un conjunto cerrado de $\mathbb{R}$.

(4).- $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$, $\mathcal{C}((a,b)) = (-\infty,a] \cup [b,\infty)$ el cual no es abierto en $\mathbb{R}$ (salvo que $a = b$). Por lo tanto (a,b) no es un conjunto cerrado de $\mathbb{R}$ (a menos que $a = b$ y en este caso $(a,b) = (a,a) = \emptyset$).

Definición 2.1.12 Sean $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y $\varepsilon > 0$. Se define la *bola cerrada en* $\mathbb{R}^n$ *con centro en* $\vec{x}_0$ *y radio* $\varepsilon > 0$ por:

$$\overline{B}(\vec{x}_0,\varepsilon) = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^n \mid \|\vec{x}_0 - \vec{y}\| \leq \varepsilon\}.$$

Ahora la bola cerrada es un conjunto cerrado de $\mathbb{R}^n$ pues

$$\mathcal{C}(\overline{B}(\vec{x}_0,\varepsilon)) = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^n \mid \|\vec{y} - \vec{y}_0\| > \varepsilon\} = \text{Ext}B(\vec{x}_0,\varepsilon)$$

el cual es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$. Por tanto $\overline{B}(\vec{x}_0,\varepsilon)$ es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^n$.

Ahora veamos que $\overline{B}(\vec{a},r)$ no es un conjunto abierto. Para demostrar esto debemos dar un $\vec{x} \in \overline{B}(\vec{a},r)$ de tal manera que en toda bola $B(\vec{x},\varepsilon)$ se encuentre por lo menos un punto $\vec{y} \in B(\vec{x},\varepsilon)$ tal que $\vec{y} \notin \overline{B}(\vec{a},r)$.

Si $\vec{a} = (a_1,\ldots,a_n)$, consideremos $\vec{x} = \vec{a} + r\vec{e}_1 = (a_1 + r, a_2, \ldots, a_n)$.

Se tiene que $\|\vec{x} - \vec{a}\| = \sqrt{(a_1 + r - a_1)^2 + (a_2 - a_2)^2 + \cdots + (a_n - a_n)^2} = r$. Por lo tanto $\vec{x} \in \overline{B}(\vec{a},r)$.

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario y sea $\vec{y} = \vec{x} + \frac{\varepsilon}{2}\vec{e}_1 = \Big((a_1 + r) + \frac{\varepsilon}{2}, a_2, \ldots, a_n\Big)$. Por una parte: $\|\vec{y} - \vec{x}\| = \big\|\frac{\varepsilon}{2}\vec{e}_1\big\| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Por lo tanto $\vec{y} \in B(\vec{x},\varepsilon)$.

Por otra parte: $\vec{y} = \vec{x} + \frac{\varepsilon}{2}\vec{e}_1 = \vec{a} + (r + \frac{\varepsilon}{2})\vec{e}_1$. Por lo tanto $\|\vec{y} - \vec{a}\| = \|(r + \frac{\varepsilon}{2})\vec{e}_1\| = |r + \frac{\varepsilon}{2}| = r + \frac{\varepsilon}{2} > r$. Esto implica que $\vec{y} \notin \overline{B}(\vec{a},r)$. Así pues $\overline{B}(\vec{a},r)$ es un conjunto cerrado pero no es un conjunto abierto.

En particular, si $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, se tiene que $\{\vec{x}_0\} = \overline{B}(\vec{x}_0,0)$. Por lo tanto $\{\vec{x}_0\}$ es un conjunto cerrado que no es abierto.

Teorema 2.1.13

i).- *$\emptyset$, $\mathbb{R}^n$ y $\overline{B}(\vec{x}_0,r) \subseteq \mathbb{R}^n$ para toda $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$, son conjuntos cerrados en $\mathbb{R}^n$.*

ii).- *La intersección de una colección arbitraria de conjuntos cerrados en $\mathbb{R}^n$ es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^n$.*

iii).- *La unión de un número finito de conjuntos cerrados en* $\mathbb{R}^n$ *es un conjunto cerrado en* $\mathbb{R}^n$.

Demostración.

i).- Ya se probó en los ejemplos anteriores.

ii).- Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una colección de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ tales que cada A_α es cerrado en $\mathbb{R}^n$. Por lo tanto para cada $\alpha \in \Lambda, \mathcal{C}A_\alpha$ es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$.

Sea $A = \bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha, \mathcal{C}A = \mathcal{C}(\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha) = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} \mathcal{C}A_\alpha$ es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$. Por lo tanto A es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^n$.

iii).- Sean $A_1, \ldots, A_k \subseteq \mathbb{R}^n$ conjuntos cerrados y sea $B = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Entonces $\mathcal{C}B = \mathcal{C}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{C}A_i$ el cual es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$. Por lo tanto B es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^n$. ❑

Observación 2.1.14 La unión de una infinidad de conjuntos cerrados en $\mathbb{R}^n$ no es necesariamente cerrado en $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 2.1.15 Sea $L_n = \left[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}\right]$ $n \in \mathbb{N}$. Entonces L_n es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Sin embargo $\bigcup_{n=1}^{\infty} L_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}] = (a, b)$ no es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}$.

Definición 2.1.16 Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Un punto $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ se llama *punto de acumulación de A* si para toda $\varepsilon > 0, [B(\vec{x}, \varepsilon) \cap A] \setminus \{\vec{x}\} \neq \emptyset$, es decir si toda bola con centro en $\vec{x}$ tiene algún punto de A distinto de $\vec{x}$ mismo.

Ponemos: $A' = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid x$ es punto de acumulación de $A\}$. El conjuto A' recibe el nombre de *conjunto derivado de A*.

Ejemplos 2.1.17

(1).- Sea $S = \{x \in [0, 1] \mid x \in \mathbb{Q}\} = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$.

Afirmamos que $S' = [0, 1]$.

En efecto, sea $x_0 \in [0, 1]$ y sea $\varepsilon > 0$. Existe $y \in \mathbb{Q} \cap [0, 1], y \neq x_0$ tal que $|y - x_0| < \varepsilon$. Por lo tanto $y \in \{B(x_0, \varepsilon) \cap S\} \setminus \{x_0\}$. Se sigue que $[B(x_0, \varepsilon) \cap S] \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$. Por lo tanto $[0, 1] \subseteq S'$.

Ahora sea $x_0 \in \mathcal{C}([0, 1]) = (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ el cual es un conjunto abierto. Por lo tanto existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x_0, \varepsilon) \subseteq \mathcal{C}([0, 1])$. Se sigue que $(B(x_0, \varepsilon) \cap S) \setminus \{x_0\} = \emptyset$. Por lo tanto $x_0 \notin S'$. Se sigue $S' = [0, 1]$.

(2).- Sean $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k \in \mathbb{R}^n$ y sea $A = \{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k\}$. Afirmamos que $A' = \emptyset$.

En efecto, sea $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Si $\vec{x}_0 = \vec{x}_i$ para algún $1 \leq i \leq k$, sea

$$\varepsilon = \min\{\|\vec{x}j - \vec{x}_0\| \mid 1 \leq j \leq n, j \neq i\} > 0.$$

Se tiene $B(\vec{x}_0, \varepsilon) \cap A = \{\vec{x}_0\} = \{\vec{x}_i\}$ y por tanto $(B(\vec{x}_0, \varepsilon) \cap A) \setminus \{\vec{x}_0\} = \{\vec{x}_0\} \setminus \{\vec{x}_0\} = \emptyset$. Por tanto $\vec{x}_0 \notin S'$.

Si $\vec{x}_0 \neq \vec{x}_i$, para toda $1 \leq i \leq k, \vec{x}_0 \in A^c$ el cual es un conjunto abierto. Por lo tanto existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(\vec{x}_0, \varepsilon) \subseteq A^c$ y por tanto $[B(\vec{x}_0, \varepsilon) \cap A] \setminus \{\vec{x}_0\} = \emptyset \setminus \{\vec{x}_0\} = \emptyset$. Más precisamente, sea $\varepsilon = \min\{\|\vec{x}_j - \vec{x}_0\| \mid 1 \leq j \leq n\} > 0$. Se tiene que $B(\vec{x}_0, \varepsilon) \cap A = \emptyset$. Por lo tanto $\vec{x}_0 \notin S'$. Se sigue que $S' = \emptyset$.

(3).- Se puede verificar que $(a, b)' = [a, b]' = [a, b]$.

Definición 2.1.18 Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Un punto $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ se llama *punto de adherencia de* A si para toda $\varepsilon > 0, B(\vec{x}_0, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.

Ponemos: $\overline{A} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{x}$ es punto de adherencia de $A\}$ y $\overline{A}$ recibe el nombre de *adherencia de* A ó *cerradura de* A.

Definición 2.1.19 Dado $A \subseteq \mathbb{R}^n$, un punto $\vec{x} \in A$ tal que $\vec{x} \notin A'$, es decir, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(\vec{x}, \varepsilon) \cap A = \{\vec{x}\}$, se llama *punto aislado de* A.

Definición 2.1.20 Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n, \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ se llama *punto frontera de* A si para toda $\varepsilon > 0, B(\vec{x}, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ y $B(\vec{x}, \varepsilon) \cap \mathcal{C}A \neq \emptyset$.

Ponemos $\partial A = \operatorname{Fr} A = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{x}$ es punto frontera de $A\}$. El conjunto $\partial A = \operatorname{Fr} A$ recibe el nombre de *frontera de* A.

Observación 2.1.21 De la definición se sigue que $\partial A = \bar{A} \cap \overline{\mathcal{C}A}$.

Ejemplos 2.1.22

(1).- Sea $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$, $\mathbb{I} = \{x \in \mathbb{R} \mid x$ es irracional$\}$. Se tiene que $\bar{\mathbb{I}} = \mathbb{R}, \partial\mathbb{I} = \mathbb{R}$. Análogamente $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} = \partial\mathbb{Q}$.

En efecto, sean $x_0 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Entonces existen $y_0 \in \mathbb{I}$, $z_0 \in \mathbb{Q}$ con $x_0 \neq y_0$, $x_0 \neq z_0$ tales que $|x_0 - y_0| < \varepsilon$ y $|x_0 - z_0| < \varepsilon$. Por lo tanto $B(x_0, \varepsilon) \cap \mathbb{I} \neq \emptyset$ y $B(x_0, \varepsilon) \cap \mathcal{C}\mathbb{I} = B(x_0, \varepsilon) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$. Por lo tanto $x_0 \in \bar{\mathbb{I}}, x_0 \in \overline{\mathbb{I}^c}$. Se sigue que $x_0 \in \partial\mathbb{I}$.

También se tendrá $\mathbb{I}' = \mathbb{Q}' = \mathbb{R}$ y tanto $\mathbb{Q}$ como $\mathbb{I}$ no tienen puntos aislados.

(2).- Se tiene $\partial\mathbb{N} = \overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$, $\mathbb{N}' = \emptyset$ y todos los puntos de $\mathbb{N}$ son puntos aislados. Las demostraciones se dejan como ejercicio.

(3).- Se tiene que $\overline{B(\vec{x}_0, \varepsilon)} = \overline{B}(\vec{x}_0, \varepsilon)$.

(4).- Se tiene $\partial((a,b)) = \partial([a,b]) = \{a,b\}$.

(5).- Sea $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 > 1\}$. Se tendrá que:

$$\overline{S} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 \geq 1\};$$
$$\partial S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1\};$$
$$\overline{S} = S \cup \partial S.$$

(6).- Sea $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 \leq 9\} \cup \{(0,0)\}$.

Se tiene:

$\mathring{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 < 9\}$,

$A' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$,

$\overline{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9\} \cup \{(0,0)\}$. El único punto aislado de A es $(0,0)$.

$\operatorname{Fr} A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 0\} \cup \{(0,0)\}$.

Observación 2.1.23 Para cualquier subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ tenemos $A' \subseteq \overline{A}, \partial A \subseteq \overline{A}$ y $A \subseteq \overline{A}$.

Teorema 2.1.24 *A es un conjunto cerrado $\iff$ $A = \overline{A}$.*

Demostración.
$\Rightarrow$) Siempre se tiene $A \subseteq \overline{A}$.

Sea $\vec{x}_0 \in \overline{A}$. Entonces para toda $\varepsilon > 0, B(\vec{x}_0, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.

Si $\vec{x}_0 \notin A$, $\mathcal{C}A$ es un conjunto abierto y $\vec{x}_0 \in \mathcal{C}A$, por lo que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $B(\vec{x}_0, \varepsilon) \subseteq \mathcal{C}A$. Por lo tanto $B(\vec{x}_0, \varepsilon_0) \cap A = \emptyset$ lo cual es absurdo. Por tanto $\vec{x}_0 \in A$ y $\overline{A} \subseteq A$, de donde se sigue que $A = \overline{A}$.

$\Leftarrow$) Sea $\vec{x} \in \mathcal{C}A$. Si acaso para toda $\varepsilon > 0, B(\vec{x}, \varepsilon) \nsubseteq \mathcal{C}A$ entonces para toda $\varepsilon > 0$, $B(\vec{x}, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. Por lo tanto $\vec{x} \in \overline{A} = A$ y $\vec{x} \in A \cap \mathcal{C}A = \emptyset$ lo cual es absurdo. Por tanto existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(\vec{x}, \varepsilon) \subseteq \mathcal{C}A$. Se sigue que $\mathcal{C}A$ es un conjunto abierto. Por tanto A es un conjunto cerrado.

Teorema 2.1.25 *A es un conjunto cerrado $\iff$ $A' \subseteq A$.*

Demostración.
$\Rightarrow$) Si A es cerrado, $A = \overline{A}$, de donde obtenemos que $A' \subseteq \overline{A} = A$.

$\Leftarrow$) Sea $\vec{x}_0 \in \overline{A}$. Por lo tanto, para toda $\varepsilon > 0, B(\vec{x}_0, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. Si $\vec{x}_0 \notin A$, entonces para toda $\varepsilon > 0, [B(\vec{x}_0, \varepsilon) \cap A] \setminus \{\vec{x}_0\} \neq \emptyset$. Por lo tanto $\vec{x}_0 \in A' \subseteq A$ y $\vec{x}_0 \in A$, lo cual es absurdo.

Asi pues $\vec{x}_0 \in A$ y $\overline{A} \subseteq A$. Por tanto A es un conjunto cerrado. ❏

Definición 2.1.26 Sean $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y $\varepsilon > 0$. Definimos la *esfera de* $\mathbb{R}^n$ *con centro en* $\vec{x}_0$ *y radio* ε por: $S(\vec{x}_0, \varepsilon) = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^n \mid \|\vec{y} - \vec{x}_0\| = \varepsilon\}$.

Observación 2.1.27 Se verifica que $S(\vec{x}_0, \varepsilon) = \partial(B(\vec{x}_0, \varepsilon))$ y puesto que para cualquier subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n, \partial A$ es cerrado (ya que $\partial A = \overline{A} \cap \overline{\mathcal{C}A}$), entonces $S(\vec{x}_0, \varepsilon)$ es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^n$.

Teorema 2.1.28 *Sea* $A \subseteq \mathbb{R}^n$. *Entonces se tiene:*

i).- $\mathring{A} = \bigcup\{V \mid V \subseteq A$ *y* V *es un conjunto abierto en* $\mathbb{R}^n\}$, *es decir* $\mathring{A}$ *es el* máximo *conjunto abierto contenido en* A.

ii).- $\overline{A} = \bigcap\{F \mid A \subseteq F$ *y* F *es un conjunto cerrado en* $\mathbb{R}^n\}$, *es decir* $\overline{A}$ *es el* mínimo *conjunto cerrado que contiene a* A.

Demostración.

i).- Sea $V \subseteq A, V$ abierto. Sea $\vec{x}_0 \in V$. Entonces existe $r > 0$ tal que $B(\vec{x}_0, r) \subseteq V \subseteq A$. Por lo tanto $\vec{x}_0 \in \mathring{A}$ y $V \subseteq \mathring{A}$, lo cual implica que

$$\bigcup\{V \mid V \subseteq A, V \text{ es un conjunto abierto}\} \subseteq \mathring{A}.$$

Ahora sea $\vec{x}_0 \in \mathring{A}$. Por tanto $r > 0$ tal que $B(\vec{x}_0 r) \subseteq A$. Así pues $V = B(\vec{x}_0, r)$ es un conjunto abierto tal que $V \subseteq A$. Por tanto

$$\vec{x}_0 \in V \subseteq \bigcup\{V \mid V \subseteq A \text{ y } V \text{ es un conjunto abierto}\}.$$

Por lo tanto

$$\mathring{A} \subseteq \bigcup\{V \mid V \subseteq A \text{ y } V \text{ es un conjunto abierto}\},$$

de donde se sigue la igualdad buscada.

ii).- Sea F un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^n$ tal que $A \subseteq F$. Sea $\vec{x}_0 \in \overline{A}$. Si $\vec{x}_0 \notin F$ entonces existe $r > 0$ tal que $B(\vec{x}_0, r) \subseteq \mathcal{C}F \subseteq \mathcal{C}A$. Por tanto $B(\vec{x}_0, r) \cap A = \emptyset$, lo cual es una contradicción. Así $\vec{x}_0 \in F$. Por tanto $\overline{A} \subseteq F$ para todo conjunto cerrado F en $\mathbb{R}^n$ y $A \subseteq F$.

Recíprocamente, sea

$$\vec{x}_0 \in \bigcap\{F \mid A \subseteq F \text{ y } F \text{ es un conjunto cerrado en } \mathbb{R}^n\}.$$

Si $\vec{x}_0 \notin \overline{A}$ entonces existe $r > 0$ tal que $B(\vec{x}_0, r) \cap A = \emptyset$. Ahora $F = \mathcal{C}(B(\vec{x}_0, r))$ es un conjunto cerrado y $B(\vec{x}_0, r) \cap A = \emptyset$. Entonces $B(\vec{x}_0, r) \subseteq \mathcal{C}A$ y por tanto $F = \mathcal{C}(B(\vec{x}_0, r)) \supseteq A$. Además $\vec{x}_0 \notin F$ lo cual es absurdo. Por tanto $\vec{x}_0 \in \overline{A}$, lo cual implica que

$$\overline{A} = \bigcap\{F \mid A \subseteq F \text{ y } F \text{ es un conjunto cerrado en } \mathbb{R}^n\}.$$ ❑

Notación 2.1.29 Ponemos $'$ = acumulación, $-$ = cerradura, $\circ$ = interior, c = complemento. Es decir si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ se entenderá: $A'^{-0} = \overset{\circ}{\widehat{(\overline{A'})}}$; $A'^{-'} = \left(\overline{A'}\right)'$; $A^{c-c} = \mathcal{C}(\overline{\mathcal{C}A})$, etc.

Proposición 2.1.30

i).- $A^{c-c} = A^{\circ}$, *es decir,* $\mathcal{C}(\overline{\mathcal{C}A}) = \overset{\circ}{A}$,

ii).- $A^{c\circ c} = A^{-}$, *es decir,* $\mathcal{C}\ \overset{\circ}{\widehat{(\mathcal{C}A)}} = \overline{A})$,

para todo subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

<u>*Demostración*</u>.

i).- Se tiene: $A^{c-} \supseteq A^c$, por lo que $A^{c-c} \subseteq A^{cc} = A$ y puesto que A^{c-c} es un conjunto abierto, entonces $A^{c-c} \subseteq A^{\circ}$.

Ahora bien, $A^{\circ} \subseteq A$, por lo que $A^{\circ c} \supseteq A^c$ y $A^{\circ c}$ es un conjunto cerrado, de donde obtenemos que $A^{\circ c} \supseteq A^{c-}$. Se sigue que $A^{\circ} = A^{\circ cc} \subseteq A^{c-c}$ y $A^{\circ} \subseteq A^{c-c}$. Así pues $A^{c-c} = A^{\circ}$.

ii).- Ejercicio. ❑

Proposición 2.1.31 *Si A es un conjunto abierto o cerrado entonces* $(\partial A)^{\circ} = \overset{\circ}{\widehat{\partial A}} = \emptyset$.

<u>*Demostración*</u>. Supongamos que A es un conjunto abierto. Por lo tanto $A^{\circ} = A$.

$$(\partial A)^{\circ} = (\overline{A} \cap \overline{\mathcal{C}A})^{\circ} = (A^{-\circ} \cap A^{c-\circ}) \underbrace{=}_{A^{c-} = A^{\circ c}} A^{-\circ} \cap A^{\circ c\circ} =$$

$$= A^{-\circ} \cap A^{c\circ} \underbrace{\subseteq}_{A^{c\circ} = A^{-c}} \overline{A} \cap A^{-c} = \overline{A} \cap \mathcal{C}\overline{A} = \emptyset$$

por lo tanto $(\partial A)^{\circ} = \emptyset$.

Ahora, si A es cerrado, entonces $\mathcal{C}A$ es abierto y $(\partial(\mathcal{C}A))^{\circ} = (\partial A)^{\circ} = \emptyset$. ❑

Definición 2.1.32 Al conjunto: $\text{Ext}\, A = \overset{\circ}{\widehat{\mathcal{C}A}}$ se le llama el *exterior de A*, $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

2.2 Sucesiones en $\mathbb{R}^k$

Definición 2.2.1 Una sucesión en $\mathbb{R}^k$, es una función $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^k$.

Ponemos: $\varphi(n) = \vec{x}_n = (x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^k) \in \mathbb{R}^k$ y denotamos $\varphi(\mathbb{N}) = \{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$.
Las nociones de sucesiones en $\mathbb{R}^k$ y de $\mathbb{R}$ coinciden como veremos en seguida.

Definición 2.2.2 Se dice que $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ *converge* a $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^k$ y se denota: $\vec{x}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \vec{x}_0$ o $\lim\limits_{n\to\infty} \vec{x}_n = \vec{x}_0$ si dada $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq n_0$, $\|\vec{x}_n - \vec{x}_0\| < \varepsilon$, es decir, para toda $n \geq n_0$, $\vec{x}_n \in B(\vec{x}_0, \varepsilon)$.

Ejemplo 2.2.3 En $\mathbb{R}^3$ sea $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\left(\dfrac{1}{n}, \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n, \dfrac{(-1)^n}{n^2}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$.

Afirmamos que $\lim\limits_{n\to\infty} \vec{x}_n = (0, e, 0)$. La razón de proponer este límite se debe al simple hecho de que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2} = 0$.

En efecto, sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq n_0$ se tiene:

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}, \quad \left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}, \quad \left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}.$$

Por lo tanto, para $n \geq n_0$, se tiene

$$\|\vec{x}_n - (0,e,0)\| = \sqrt{\left(\frac{1}{n} - 0\right)^2 + \left(\left(1+\frac{1}{n}\right) - e\right)^2 + \left(\frac{(-1)^n}{n^2} - 0\right)^2} <$$
$$< \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{3} + \frac{\varepsilon^2}{3} + \frac{\varepsilon^2}{3}} = \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon$$

probando lo afirmado.

Teorema 2.2.4 *Sea $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathbb{R}^k$, $\vec{x}_n = (x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^k)$ y sea $\vec{x}_0 = (x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^k) \in \mathbb{R}^k$. Entonces: $\lim\limits_{n\to\infty} \vec{x}_n = \vec{x}_0 \iff \lim\limits_{n\to\infty} x_n^j = x_0^j$ para todo $1 \leq j \leq k$. Es decir $\vec{x}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \vec{x}_0 \iff$ la sucesión en cada componente de $\vec{x}_n$ converge a la componente respectiva de $\vec{x}_0$.*

En particular se tiene que $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}^k$ converge $\iff$ cada sucesión de las componentes $\{x_n^j\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq k$, converge.

<u>*Demostración*</u>.
$\Rightarrow$) Sea $1 \leq j \leq k$ fijo. Sea $\varepsilon > 0$. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq n_0$, $\|\vec{x}_n - \vec{x}_0\| < \varepsilon$ y $|x_n^j - x_0^j| \leq \|\vec{x}_n - \vec{x}_0\| < \varepsilon$. Se sigue que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^j = x_0^j$.
$\Leftarrow$) Sea ahora $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^j = x_0^j$ para toda $1 \leq j \leq k$.

Sea $\varepsilon > 0$. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que para toda $n \geq n_0$, y para toda $1 \leq j \leq k$, $|x_n^j - x_0^j| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{k}}$. Entonces para $n \geq n_0$ se tiene:

$$\|\vec{x}_n - \vec{x}_0\| = \left\{\sum_{j=1}^{k}(x_n^j - x_0^j)^2\right\}^{1/2} < \left\{\sum_{j=1}^{k}\frac{\varepsilon^2}{k}\right\}^{1/2} = \varepsilon.$$

Por lo tanto $\lim\limits_{n\to\infty} \vec{x}_n = \vec{x}_0$. ❏

Definición 2.2.5 Una sucesión $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}^k$ se llama de *Cauchy* si para toda $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n, m \geq n_0$, $\|\vec{x}_n - \vec{x}_m\| < \varepsilon$.

El siguiente resultado nos dice que $\mathbb{R}^k$ (al igual que $\mathbb{R}$) es un espacio *"completo"*.

Teorema 2.2.6 (Cauchy)

i).- *Sea* $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}^k, \vec{x}_n = (x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^k)$. *Entonces* $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ *es de Cauchy* $\iff \{x_n^j\}_{n=1}^{\infty}$ *es de Cauchy para toda* $1 \leq j \leq k$.

ii).- $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}^k$ *converge* $\iff \{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ *es de Cauchy.*

Demostración. Ejercicio. ❏

Teorema 2.2.7 (Bolzano-Weierstrass) *Sea* $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}^k$ *una sucesión acotada, es decir, existe* $M > 0, M \in \mathbb{R}$ *tal que* $\|\vec{x}_n\| \leq M$ *para toda* $n \in \mathbb{N}$. *Entonces existe una subsucesión* $\{\vec{x}_{n_\ell}\}_{\ell=1}^{\infty}$ *de* $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ *que es convergente.*

Demostración. Ejercicio. ❏

Analogamente se tendrán los siguientes resultados:

1. Si $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}^k$ converge, entonces el límite es único.

2. Si $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}^k$ converge, entonces $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ está acotada. El recíproco no se cumple.

3. Una sucesión $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}^k$ converge a $\vec{x}_0$ si y sólo si toda subsucesión $\{\vec{x}_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $\vec{x}_0$.

Las demostraciones son iguales que en sucesiones reales y se dejan como ejercicio.

Ahora pasamos a caracterizar los puntos de adherencia y los puntos de acumulación por medio de sucesiones.

Teorema 2.2.8 *Sea* $A \subseteq \mathbb{R}^k$ *y sea* $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^k$. *Entonces:*

i).- $\vec{x}_0 \in \overline{A} \iff$ *existe* $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$ *tal que* $\lim\limits_{n\to\infty} \vec{x}_n = \vec{x}_0$.

ii).- $\vec{x}_0 \in A' \iff$ *existe* $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A, \vec{x}_n \neq \vec{x}_0$ *para toda* $n \in \mathbb{N}$ *y* $\lim\limits_{n\to\infty} \vec{x}_n = \vec{x}_0$.

Demostración.

i).- $\Rightarrow$) Sea $\vec{x}_0 \in \overline{A}$, entonces para toda $\varepsilon > 0, B(\vec{x}_0, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.

Sea $\varepsilon_n = \dfrac{1}{n}$ y sea $\vec{x}_n \in B(\vec{x}_0, \varepsilon_n) \cap A$. Entonces $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$ y para toda $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq n_0$, $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$ y por lo tanto para toda $n \geq n_0$, $\|\vec{x}_n - \vec{x}_0\| < \varepsilon_n = \dfrac{1}{n} < \varepsilon$. Por tanto $\lim\limits_{n\to\infty} \vec{x}_n = \vec{x}_0$.

$\Leftarrow$) Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq n_0, \|\vec{x}_n - \vec{x}_0\| < \varepsilon$.

Por lo tanto $\vec{x}_n \in B(\vec{x}_0, \varepsilon) \cap A$. Se sigue que para toda $\varepsilon > 0$, $B(\vec{x}_0, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$, de donde tenemos que $\vec{x}_0 \in \overline{A}$.

ii).- $\Rightarrow$) Se procede de manera idéntica que en i) sólo que ahora elegimos $\vec{x}_n \in [B(\vec{x}_0, \varepsilon) \cap A] \setminus \{\vec{x}_0\}$ por lo que $\vec{x}_n \neq \vec{x}_0$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

$\Leftarrow$) Sea $\varepsilon > 0$. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq n_0, \|\vec{x}_n - \vec{x}_0\| < \varepsilon$, lo cual implica que $\vec{x}_n \in [B(\vec{x}_0, \varepsilon) \cap A] \setminus \{\vec{x}_0\}$. Por tanto, para toda $\varepsilon > 0, [B(\vec{x}_0, \varepsilon) \cap A] \setminus \{\vec{x}_0\} \neq \emptyset$. Se sigue que $\vec{x}_0 \in A'$. ❑

Ejemplo 2.2.9 Sea $A = \left\{ \left(\dfrac{m}{n}, \dfrac{1}{n} \right) \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$. Queremos determinar A'.

Sea $(x_0, 0) \in B = \{(x, 0) | x \in \mathbb{R}\}$. Existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{Q}$ tal que $x_n \neq x_0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Sea $x_n = \dfrac{p_n}{q_n}$. Por tanto $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = \infty$. Se sigue que $\left(\dfrac{p_n}{q_n}, \dfrac{1}{q_n} \right) \xrightarrow[n\to\infty]{} (x_0, 0)$ y $\left\{ \left(\dfrac{p_n}{q_n}, \dfrac{1}{q_n} \right) \right\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$. Por lo tanto $B \subseteq A'$.

Sea ahora $(x_0, y_0) \in A'$. Por lo tanto existe $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$ para toda $(x_n, y_n) \neq (x_0, y_0)$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (x_0, y_0)$.

Sea $x_n = \dfrac{p_n}{q_n}$. Si $x_n = x_0$ para toda $n \in \mathbb{N}, |q_n| < M$. Por lo tanto existe una subsucesión $\{q_{n_k}\}_{n=1}^{\infty}$ convergente. Puesto que $\{q_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{Z}$, se tiene que existe $n_{k_0} \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n_k \geq n_{k_0}, q_{n_k} = q$. Se sigue que $y_{n_k} = \dfrac{1}{q_{m_k}} = \dfrac{1}{q}$ y $\lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} = y_0 = \dfrac{1}{q}$, por lo que $y_{n_k} = y_0$, lo cual es imposible.

Así pues se tiene $x_n \neq x_0$ para una infinidad de $n \in \mathbb{N}$, por lo que la subsucesión respectiva de q_n diverge a ∞. Cambiando los índices podemos poner $q_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$. Por lo tanto $y_n = \dfrac{1}{q_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 = y_0$. Por lo tanto $(x_0, y_0) = (x_0, 0) \in B$, lo que prueba que $A' \subseteq B$, y $A' = B = \{(x, 0) | x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \times \{0\}$.

2.3 Ejercicios

1) Sean $\vec{x}_0, \vec{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ tales que $\vec{x}_0 \neq \vec{y}_0$. Probar que existen dos conjuntos abiertos U, V en $\mathbb{R}^n$ tales que $\vec{x}_0 \in U, \vec{y}_0 \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.

2) a) Sean $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$ intervalos abiertos en $\mathbb{R}$. Demostrar que el conjunto $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$ es abierto en $\mathbb{R}^2$.
   b) Probar que $B_\infty(\vec{a}, r) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\vec{x} - \vec{a}\|_\infty < r\} = (a_1 - r, a_1 + r) \times (a_2 - r, a_2 + r)$ y deducir que $B_\infty(\vec{a}, r)$ es abierto en $\mathbb{R}^2$.
   c) Sean G_1, G_2 conjuntos abiertos en $\mathbb{R}$. Mostrar que $G_1 \times G_2$ es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^2$.
   d) Generalizar los resultados anteriores a $\mathbb{R}^n$.

3) a) Demostrar que el conjunto $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0\}$ es abierto en $\mathbb{R}^3$.
   b) Probar que el conjunto $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0, y > 0, z > 0\}$ es abierto en $\mathbb{R}^3$.

4) Considerar los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

   a) (a, b);
   b) $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (n, n+1)$;
   c) $(-\infty, a) \cup (b, \infty)$;
   d) $(-\infty, a) \cup [b, \infty)$;
   e) $\mathbb{Z}$;
   f) $[a, b]$;
   g) $(a, b]$.

   con $a \leq b$.

   Decir cuales de estos conjuntos son abiertos, no son abiertos, son cerrados, no son cerrados en $\mathbb{R}$ y demostrar las respuestas.

5) Demostrar que:

   a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \text{ y } y \in (a, b]\}$ no es ni abierto ni cerrado en $\mathbb{R}^2$.
   b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \text{ y } x \in [a, b]\}$ es cerrado pero no es abierto en $\mathbb{R}^2$.
   c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\} \cup \{(0, 0)\}$ no es ni abierto ni cerrado en $\mathbb{R}^2$.

d) $\mathbb{Q}$ no es ni abierto ni cerrado en $\mathbb{R}$.

6) a) Sea $H_n = \left(a - \dfrac{1}{n}, b + \dfrac{1}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$. Probar que $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} H_n = [a, b]$. Así pues la intersección de una familia de conjuntos abiertos que no es finita, no tiene porque ser un conjunto abierto.

b) Sea $L_n = \left[a + \dfrac{1}{n}, b - \dfrac{1}{n}\right]$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Probar que $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} L_n = (a, b)$. Así pues la unión de una familia conjuntos de cerrados que no es finita, no tiene por que ser un conjunto cerrado.

7) Probar que la esfera $S(\vec{a}_0, r) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\vec{x} - \vec{a}\| = r\}$ es cerrado pero que no es abierto en $\mathbb{R}^n$.

8) Sea $A = \left\{\left(x, \dfrac{1}{x}\right) \mid x > 0\right\}$. Demostrar que A es un conjunto cerrado y que no es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^2$.

9) Sean $[a_1, b_1], [a_2, b_2]$ dos intervalos cerrados en $\mathbb{R}$. Probar que $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^2$. Generalizar a $\mathbb{R}^n$. Deducir que $\overline{B}_\infty(\vec{a}, r) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\vec{x} - \vec{a}\|_\infty \leq r\}$ es cerrado en $\mathbb{R}^n$.

10) a) Si F_1, F_2 son dos conjuntos cerrados en $\mathbb{R}$, mostrar que $F_1 \times F_2$ es cerrado en $\mathbb{R}^2$.

Sugerencia: $\mathcal{C}(F_1 \times F_2) = (\mathcal{C}F_1 \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \mathcal{C}F_2)$.

b) Si $F_1 \times F_2$ es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^2$, mostrar que F_1, F_2 son conjuntos cerrados en $\mathbb{R}$. Se está suponiendo que $F_1 \neq \emptyset \neq F_2$.

Sugerencia: Para probar que F_1 es cerrado en $\mathbb{R}$, tomar $x_1 \notin F_1$ y tomar $x_2 \in F_2$. Entonces $(x_1, x_2) \notin F_1 \times F_2$. Por lo tanto existe $B((x_1, x_2), \varepsilon) \subseteq \mathcal{C}(F_1 \times F_2)$. De ahí obtener un intervalo abierto de centro x_1 y disjunto de F_1.

c) Probar que $F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_n$ es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^n \iff F_1, F_2, \ldots, F_n$ son conjuntos cerrados en $\mathbb{R}$ donde $F_1 \neq \emptyset, F_2 \neq \emptyset, \ldots, F_n \neq \emptyset$.

11) Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n, \vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Definimos $A + \vec{x}_0 = \{\vec{a} + \vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n \mid \vec{a} \in A\}$. Más generalmente, si $B \subseteq \mathbb{R}^n$, ponemos $A + B = \{\vec{a} + \vec{b} \in \mathbb{R}^n | \vec{a} \in A \text{ y } \vec{b} \in B\}$.

a) Mostrar que si A es un conjunto abierto, entonces $A + \vec{x}_0$ es un conjunto abierto.

b) Probar que si A es un conjunto abierto, entonces $A+B$ es un conjunto abierto.

Sugerencia: $A+B = \bigcup_{\vec{b}\in B}(A+\vec{b})$.

12) Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y sea $C = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid d(\vec{x},\vec{a}) < 1 \text{ para algún } \vec{a} \in A\}$. Demostrar que $C = \bigcup_{\vec{a}\in A} B(\vec{a},1)$ y deducir que C es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$.

13) Dados $A, B \subseteq \mathbb{R}$, se define $A \cdot B = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$. Si A es un conjunto abierto, ¿será cierto que $A \cdot B$ es un conjunto abierto en $\mathbb{R}$? Justificar la respuesta.

14) a) Considerar los subconjuntos $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I} = \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ de $\mathbb{R}$. Mostrar que $\overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \overset{\circ}{\mathbb{I}} = \emptyset$. Hallar $\operatorname{Ext}\mathbb{Q}$ y $\operatorname{Ext}\mathbb{I}$.

b) Sea $\mathbb{Q}^n = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{x} = (x_1,\ldots,x_n), x_i \in \mathbb{Q}, 1 \le i \le n\}$. ¿Que son $\overset{\circ}{\widehat{\mathbb{Q}^n}}$, $\operatorname{Ext}\mathbb{Q}^n$?

15) Sean $A, B \subset \mathbb{R}^n$.

a) Probar que $A \subseteq B$ implica $\overset{\circ}{A} \subseteq \overset{\circ}{B}$ y probar que para toda $C, D \subseteq \mathbb{R}^n$ se tiene $\overset{\circ}{\widehat{C\cap D}} = \overset{\circ}{C} \cap \overset{\circ}{D}$.

b) Mostar que $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subseteq \overset{\circ}{\widehat{A\cup B}}$. Dar un ejemplo de subconjuntos de $\mathbb{R}$ donde $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \neq \overset{\circ}{\widehat{A\cup B}}$.

c) Demostrar que $A \cap \operatorname{Ext}A = \emptyset$ y $\overset{\circ}{A} \cap \operatorname{Ext}A = \emptyset$.

d) $\operatorname{Ext}(\mathcal{C}(\operatorname{Ext}A)) = \operatorname{Ext}A$.

e) $\operatorname{Ext}(A\cup B) = (\operatorname{Ext}A) \cap (\operatorname{Ext}B)$.

16) Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Probar que $\overset{\circ}{A} \times \overset{\circ}{B} = \overset{\circ}{\widehat{A\times B}}$.

17) Considerar los conjuntos de los Ejercicios 4, 7 y los incisos a), b) y c) del Ejercicio 5. Hallar su interior y su exterior, justificando las respuestas.

18) Demostrar que $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto cerrado $\iff \overline{A} \subseteq A$.

19) a) Probar las fórmulas de "dualidad" entre "interior" y "adherencia": para todo subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathcal{C}\overline{A} = \overset{\circ}{\widehat{\mathcal{C}A}} = \operatorname{Ext}A$ y $\mathcal{C}\overset{\circ}{A} = \overline{\mathcal{C}A}$.

b) Demostrar que para cualesquier subconjuntos $A, B \subseteq \mathbb{R}^n, \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

c) Mostrar que para todo $A, B \subseteq \mathbb{R}^n : \overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$. Dar un ejemplo en $\mathbb{R}$ de dos subconjuntos A, B tales que $\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$.

20) Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Probar que $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.

21) Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Omega}$ una familia de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Demostrar que $\bigcup\limits_{\alpha \in \Omega} \overline{A}_\alpha \subseteq \overline{\bigcup\limits_{\alpha \in \Omega} A_\alpha}$. Dar un ejemplo en $\mathbb{R}$ de conjuntos donde la inclusión sea estricta.

22) a) Probar que $\overline{\emptyset} = \emptyset = \mathring{\emptyset}$ y $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n = \overset{\circ}{\widehat{\mathbb{R}^n}}$.

b) Dar un ejemplo de un subconjunto A en $\mathbb{R}^n$ tal que $\mathring{A} = \emptyset$ y $\overline{A} = \mathbb{R}^n$.

23) Probar que para todo subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathring{A} \subseteq \overset{\circ}{\overline{A}}$ y $\overline{\mathring{A}} \subseteq \overline{A}$. Dar ejemplos en $\mathbb{R}$ donde las inclusiones sean estrictas.

24) Demostrar que:

a) $\overset{\circ}{\widehat{B(\vec{a}, r)}} = B(\vec{a}, r)$ y $\overset{\circ}{\widehat{\overline{B}(\vec{a}, r)}} = B(\vec{a}, r)$.

b) $\overline{\overline{B}(\vec{a}, r)} = \overline{B}(\vec{a}, r)$ y $\overline{B(\vec{a}, r)} = \overline{B}(\vec{a}, r)$.

c) $\operatorname{Ext} B(\vec{a}, r) = \operatorname{Ext} \overline{B}(\vec{a}, r) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\vec{x} - \vec{a}\| > r\}$.

25) Demostrar que para todo subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n : \overline{A} = A \cup A'$ y $\mathring{A} \cup \operatorname{Fr} A = A \cup \operatorname{Fr} A = \overline{A}$.

Además $\mathring{A} \cap \partial A = \emptyset$ y $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$.

Deducir que A es cerrado $\iff A' \subseteq A$.

Deducir también que $A' \supseteq \overline{A} \setminus A$.

26) Probar que para todo $A, B \subseteq \mathbb{R}^n : (A \cup B)' = A' \cup B'$.

27) Mostrar que para todo $A \subseteq \mathbb{R}^n, A'$ es un conjunto cerrado.

Sugerencia: Probar que $A'' \subseteq A'$.

28) Sean A, B dos subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Probar que si $A \subseteq B$, entonces $A' \subseteq B'$.

29) Sea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \text{ y } 0 < x < 1\}$. Hallar A'.

Probar que $\mathbb{N} = \overline{\mathbb{N}} = \partial \mathbb{N}$ y que $\mathring{\mathbb{N}} = \mathbb{N}' = \emptyset$.

Por último, verificar que $\partial((a, b)) = \partial([a, b]) = \{a, b\}$.

30) Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$.

    a) Se supone que A está acotado superiormente. Sea $x = \sup A$. Demostrar que $x \in \overline{A}$.
    b) Dar un ejemplo de un conjunto A donde $x \in A'$ y otro donde $x \notin A'$.
    c) Al suponer que A está acotado inferiormente, definimos $y = \inf A$. Probar que $y \in \overline{A}$ y hacer lo mismo que en b) con y en lugar de x.

31) Probar las siguientes afirmaciones:

    a) $\operatorname{Fr} A = \overline{A} \cap \overline{\mathcal{C}A}$.
    b) $\operatorname{Fr} A = \operatorname{Fr}(\mathcal{C}A)$.
    c) $\mathring{A} \cap \operatorname{Fr} A = \emptyset$; $\mathring{A} \cap \operatorname{Ext} A = \emptyset$ y $\operatorname{Fr} A \cap \operatorname{Ext} A = \emptyset$.
    d) Todo punto aislado de A es un punto frontera de A.
    e) $\operatorname{Fr} A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$.

32) Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^n$.

    a) Mostrar que A es un conjunto abierto $\iff A \cap \operatorname{Fr} A = \emptyset$.
    b) Probar que A es un conjunto cerrado $\iff \operatorname{Fr} A \subseteq A$.

33) Demostrar que $\operatorname{Fr} \overline{A} \subseteq \operatorname{Fr} A$ y $\operatorname{Fr} \mathring{A} \subseteq \operatorname{Fr} A$. Dar ejemplos en $\mathbb{R}$ de casos en que estos tres conjuntos sean distintos.

34) Probar que $\operatorname{Fr} B(\vec{a}, r) = \operatorname{Fr} \overline{B}(\vec{a}, r) = S(\vec{a}, r) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\vec{x} - \vec{a}\| = r\}$.

35) Encontrar la frontera de los conjuntos dados en los Ejercicios 4 y 5.

36) Decidir cuales de las siguientes sucesiones son convergentes.

    a) $\left\{\left((-1)^n, \frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$;
    b) $\left\{\left(1, \frac{1}{n}, 2^n\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$;
    c) $\left\{\left(\frac{1}{n}\cos n\pi, \frac{1}{n}\operatorname{sen}\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$;
    d) $\left\{\left(\frac{1}{n^2}, n^{-n}, e^{-n^2}, \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$.

37) Sea $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión convergente en $\mathbb{R}^p$, digamos $\vec{x} = \lim\limits_{n\to\infty} \vec{x}_n$. Sea $A = \{\vec{x}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Probar que $\vec{x} \in \overline{A}$. Más aún demostrar que $\overline{A} = A \cup \{\vec{x}\}$.

    Sugerencia: Probar que $A \cup \{\vec{x}\}$ es cerrado.

38) Sea S el conjunto:

    a) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y^2\}$;
    b) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y\}$;
    c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{Q}, x^2 < 2\}$.

    ¿Es S cerrado? ¿Es S abierto? Hallar $\overset{\circ}{S}$, S', $\overline{S}$, $\operatorname{Fr} S$, $\operatorname{Ext} S$.

39) Encontrar el conjunto de puntos de acumulación de los siguientes conjuntos en $\mathbb{R}^2$.

    a) $\{(m, n) \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$;
    b) $\{(p, q) \mid p, q \in \mathbb{Q}\}$;
    c) $\left\{\left(\frac{m}{n}, \frac{1}{n}\right) \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\right\}$;
    d) $\left\{\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}, 0\right) \mid m, n \in \mathbb{Z}, m, n \neq 0\right\}$.

40) Sea $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathbb{R}^p, \vec{x}_n = (x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{pn}), n \in \mathbb{N}$. Probar que $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}^p \iff \{x_{jn}\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$ para $j = 1, 2, \ldots, p$.

41) Sea $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathbb{R}^p$. Demostrar que $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente $\iff$ $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy.

42) Sea $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathbb{R}^p$ acotada. Probar que $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión convergente.

43) Sea $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty}, \vec{x}_n = (x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{pn})$ y $\{\vec{y}_n\}_{n=1}^{\infty}, \vec{y}_n = (y_{1n}, \ldots, y_{pn})$ dos sucesiones convergentes en $\mathbb{R}^p$, digamos $\vec{x} = \lim\limits_{n\to\infty} \vec{x}_n, \vec{y} = \lim\limits_{n\to\infty} \vec{y}_n$.

    a) Sea $\vec{z}_n = \vec{x}_n + \vec{y}_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Probar que la sucesión $\{\vec{z}_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente en $\mathbb{R}^p$ y que $\vec{x} + \vec{y} = \lim\limits_{n\to\infty} \vec{z}_n$.
    b) Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y sea $\vec{w}_n = \lambda\vec{x}_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Mostrar que la sucesión $\{\vec{w}_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente en $\mathbb{R}^p$ y $\lambda\vec{x} = \lim\limits_{n\to\infty} \vec{w}_n$.

c) Sea $r_n = \langle \vec{x}_n, \vec{y}_n \rangle$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Probar que la sucesión $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente en $\mathbb{R}$ y que $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \lim\limits_{n\to\infty} r_n$.

d) Sea $s_n = \|\vec{x}_n\|$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Probar que la sucesión $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente en $\mathbb{R}$ y que $\|\vec{x}\| = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$.

Capítulo 3

Conjuntos compactos y conexos

3.1 Conjuntos compactos

Definición 3.1.1 Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y sea $\{B_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una colección se subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. La colección $\{B_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ se llama *cubierta* o *recubrimiento* de A si $A \subseteq \bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}\{B_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$. La colección se llama $\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}\{B_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ *cubierta abierta* de A si $A \subseteq \bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} B_\alpha$ además B_α es un conjunto abierto para toda $\alpha \in \Lambda$.

Una *subcubierta* de $\{B_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una subcolección $\{B_\beta\}_{\beta\in\Lambda'}$, donde $\Lambda' \subseteq \Lambda$ y $A \subseteq \bigcup\limits_{\beta\in\Lambda'} B_\beta$.

Ejemplos 3.1.2

(1).- Sea $G_n = (-n, n)$ y $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n = \mathbb{R}$. Por lo tanto $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una cubierta abierta de $\mathbb{R}$. Sin embargo notemos que cualquier subcubierta finita de $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ no cubre a $\mathbb{R}$.

(2).- Sea $H_n = \left(a + \dfrac{1}{n}, b - \dfrac{1}{n}\right)$. Se tiene que $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left(a + \dfrac{1}{n}, b - \dfrac{1}{n}\right) = (a, b)$. Por lo tanto $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una cubierta abierta de (a, b). Sin embargo notemos que ninguna subcubierta finita de $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ cubre a (a, b).

(3).- Sea $A = \{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n\} \subseteq \mathbb{R}^k$. Sea $\{B_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una cubierta abierta de A. Entonces $A \subseteq \bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} B_\alpha$.

Sean $\vec{x}_1 \in B_{\alpha_1}, \ldots, \vec{x}_i \in B_{\alpha_i}, \ldots, \vec{x}_n \in B_{\alpha_n}$. Por lo tanto $A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_{\alpha_i}$. Se sigue $\{B_{\alpha_i}\}_{i=1}^{n}$ es una subcubierta finita de A.

Definición 3.1.3 Un subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ se llama *compacto* si de cualquier cubierta abierta de A, se puede extraer una subcubierta finita.

Ejemplos 3.1.4

(1).- Por los Ejemplos 3.1.2 se tiene que $\mathbb{R}$ y (a,b) no son subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$.

(2).- $\{\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_n\} = A \subseteq \mathbb{R}^p$ es compacto por el Ejemplo 3.1.2(3).

(3).- Sea $A = \left\{\left(0,\dfrac{1}{n}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid n \in \mathbb{N}\right\}$. Veremos que A no es compacto en $\mathbb{R}^2$.

Para demostrar esto se debe hallar una cubierta abierta de A que no contenga ninguna subcubierta finita

Sean

$$\begin{aligned}
G_1 &= B_\infty\left((0,1),1-\frac{1}{2}\right) = B_\infty\left((0,1),\frac{1}{2}\right),\\
G_2 &= B_\infty\left(\left(0,\frac{1}{2}\right),\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) = B_\infty\left(\left(0,\frac{1}{2}\right),\frac{1}{2\cdot 3}\right),\\
G_3 &= B_\infty\left(\left(0,\frac{1}{3}\right),\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) = B_\infty\left(\left(0,\frac{1}{3}\right),\frac{1}{3\cdot 4}\right),\\
&\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots\\
G_n &= B_\infty\left(\left(0,\frac{1}{n}\right),\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = B_\infty\left(\left(0,\frac{1}{n}\right),\frac{1}{n(n+1)}\right),\\
&\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots
\end{aligned}$$

La familia $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una cubierta abierta de A.

Tomemos ahora una subcolección finita $G_{n_1},\ldots,G_{n_k}$ arbitraria de la colección $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$. Probaremos que $A \not\subseteq G_{n_1}\cup\ldots\cup G_{n_k}$. Con esto habremos probado que la cubierta abierta $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$, no tiene ninguna subcubierta finita.

Primero observemos que $\left(0,\dfrac{1}{p}\right) \in G_n \iff p = n$.

En efecto, si $p=n$, entonces claramente $\left(0,\dfrac{1}{p}\right) = \left(0,\dfrac{1}{n}\right) \in G_n$.

Ahora bien si $p \neq n$, digamos por ejemplo que $p > n$, entonces

$$\left\|\left(0,\frac{1}{p}\right)-\left(0,\frac{1}{n}\right)\right\|_\infty = \left|\frac{1}{p}-\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}-\frac{1}{p} = \frac{p-n}{np} \geq \frac{1}{n(n+1)}$$

donde $\dfrac{1}{n(n+1)}$ es el radio de G_n. Por lo tanto $\left(0, \dfrac{1}{p}\right) \notin G_n$.

Ahora si $p < n$, entonces $\left\| \left(0, \dfrac{1}{n}\right) - \left(0, \dfrac{1}{p}\right) \right\|_\infty = \dfrac{n-p}{np} > \dfrac{1}{n(n+1)}$ = radio de G_n. Por tanto $\left(0, \dfrac{1}{p}\right) \notin G_n$.

Ahora probaremos que $A \not\subseteq G_{n_1} \cup G_{n_2} \cup \cdots \cup G_{n_k}$. Sea $p \in \mathbb{N}$ tal que $p > \max\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$, $\left(0, \dfrac{1}{p}\right) \notin (G_{n_1} \cup \cdots \cup G_{n_k})$. Por tanto $A \not\subseteq G_{n_1} \cup \cdots \cup G_{n_k}$. Se sigue que A no es compacto.

Se puede observar que esta misma demostración sirve para probar que el conjunto $\{0\} \times (0, 1]$ no es compacto.

La definición de conjunto compacto por medio de cubiertas abiertas es en realidad muy teórica y en el siguiente resultado caracterizaremos a los compactos por medio de propiedades más fáciles de manejar. La razón de la definición de compactos tal como se dió es que en las generalizaciones a *"espacios topológicos"* ya no nos sirven las caracterizaciones que ahora vamos a dar para subconjuntos en $\mathbb{R}^n$.

Teorema 3.1.5 (Heine-Borel) *Se tiene que $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto compacto $\iff$ A es cerrado y acotado.*

Demostración.
$\Rightarrow$) Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto.

i) A es cerrado:

Sea $\vec{x}_o \in \mathcal{C}A$. Por lo tanto $\vec{x}_0 \neq \vec{y}$ para toda $\vec{y} \in A$. Para cada $\vec{y} \in A$, existen conjuntos abiertos $\mathcal{U}_{\vec{y}}, V_{\vec{y}}$ tales que $\vec{x}_0 \in \mathcal{U}_{\vec{y}}$, $\vec{y} \in V_{\vec{y}}$ y $\mathcal{U}_{\vec{y}} \cap V_{\vec{y}} = \emptyset$.

Ahora bien, claramente $A \subseteq \bigcup\limits_{\vec{y} \in A} V_{\vec{y}}$. Por tanto $\{V_{\vec{y}}\}_{\vec{y} \in A}$ es una cubierta abierta de A.

Por ser A compacto, existe una subcubierta finita: $A \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{m} V_{\vec{y}_j}$. Ahora $\vec{x}_0 \in \bigcap\limits_{j=1}^{m} \mathcal{U}_{\vec{y}_j}$ el cual es un abierto, por lo que existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(\vec{x}_0, \varepsilon) \subseteq \bigcap\limits_{j=1}^{m} \mathcal{U}_{\vec{y}_j}$.

Ahora

$$B(\vec{x}_0, \varepsilon) \cap A \subseteq \left(\bigcap_{j=1}^{m} \mathcal{U}_{\vec{y}_j}\right) \bigcap \left(\bigcup_{j=1}^{m} V_{\vec{y}_j}\right) = \bigcup_{j=1}^{m} \left\{ \left(\bigcap_{i=1}^{m} \mathcal{U}_{\vec{y}_i}\right) \cap V_{\vec{y}_j} \right\} \subseteq$$

$$\subseteq \bigcup_{j=1}^{m} (\mathcal{U}_{\vec{y}_j} \cap V_{\vec{y}_j}) = \bigcup_{j=1}^{m} \emptyset = \emptyset.$$

Se sigue que $B(\vec{x}_0,\varepsilon) \subseteq \mathcal{C}A$.

Por tanto $\mathcal{C}A$ es un conjunto abierto y A es un conjunto cerrado.

(ii) A es acotado:

Sea $H_m = B(\vec{0}, m)$. Se tiene $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} H_m = \mathbb{R}^n \supseteq A$. Por tanto $\{H_m\}_{m=1}^{\infty}$ es una cubierta abierta de A. Entonces existe una subcubierta finita $H_{n_1}, \ldots, H_{n_l}$. Reordenando los índices podemos suponer: $n_1 \leq n_2 \leq \ldots \leq n_l$ y por tanto $H_{n_l} \supseteq H_{n_j}$ para toda $1 \leq j \leq l$. Se sigue que $A \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{l} H_{n_j} = H_{n_l}$. Por lo tanto para toda $\vec{x} \in A, \vec{x} \in H_{n_l}$ y entonces $\|\vec{x}\| < n_l$. Es decir A está acotado.

$\Leftarrow$) Primero supongamos que $A = [a_1^1, b_1^1] \times [a_1^2, b_1^2] \times \ldots \times [a_1^n, b_1^n] = I_1$.

Supongamos que A no es compacto, por lo tanto existe una cubierta $\{B_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ de I_1 que no tiene una subcubierta finita.

Partimos cada intervalo a la mitad:

$$c_1^1 = \frac{a_1^1 + b_1^1}{2}, \ldots, c_1^n = \frac{a_1^n + b_1^n}{2}$$

y obtenemos 2^n subrectángulos de I_1. Al menos uno de estos subrectángulos no puede ser recubierto por un número finito de B_α.

Sea $I_2 = [a_2^1, b_2^1] \times [a_2^2, b_2^2] \times \ldots \times [a_2^n, b_2^n] \subseteq I_1$ tal subrectángulo.

Volvemos a partir cada intervalo a la mitad con puntos medios dados por

$$c_2^1 = \frac{a_2^1 + b_2^1}{2}, c_2^2 = \frac{a_2^2 + b_2^2}{2}, \ldots, c_2^n = \frac{a_2^n + b_2^n}{2}$$

y obtenemos 2^n subrectángulos de I_2.

Alguno de estos subrectángulos de I_2 no puede ser cubierto por un número finito de los conjuntos B_α's.

Sea $I_3 = [a_3^1, b_3^1] \times [a_3^2, b_3^2] \times \ldots \times [a_3^n, b_3^n] \subseteq I_2$ tal subrectángulo y nuevamente volvemos a repetir el proceso.

En el paso m-ésimo, $I_m = [a_m^1, b_m^1] \times \ldots \times [a_m^n, b_m^n]$ tomamos los centros de los intervalos:

$$c_m^1 = \frac{a_m^1 + b_m^1}{2}, c_m^2 = \frac{a_m^2 + b_m^2}{2}, \ldots, c_m^n = \frac{a_m^n + b_m^n}{2}$$

y obtenemos 2^n subrectángulos de I_m y al menos uno de ellos, digamos

$$I_{m+1} = [a_{m+1}^1, b_{m+1}^1] \times \ldots \times [a_{m+1}^n, b_{m+1}^n] \subseteq I_m$$

no puede ser cubierto por un número finito de los conjuntos B_α's.

Ahora la sucesión de los centros $\{\vec{c}_m\}_{m=1}^{\infty} = \{(c_m^1, c_m^2, \ldots, c_m^n)\}_{m=1}^{\infty}$, de estos subrectángulos I_m, está acotada pues $\{\vec{c}_m\}_{m=1}^{\infty} \subseteq I_1$ y por tanto, gracias al Teorema de Balzano-Weierstrass, $\{\vec{c}_m\}_{m=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión convergente, digamos

$$\vec{c}_{m_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \vec{c}_0.$$

Puesto que $\{\vec{c}_{m_k}\}_{k=1}^{\infty} \subseteq A$ y A es un conjunto cerrado se tiene que $\vec{c}_0 \in A \subseteq \bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} B_\alpha$. Por tanto existe $\alpha_0 \in \Lambda$ tal que $\vec{c}_0 \in B_{\alpha_0}$. Ahora, puesto que B_{α_0} es un conjunto abierto, se tiene que existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(\vec{c}_0, \varepsilon) \subseteq B_{\alpha_0}$. Ahora, $\overline{I}_m = I_m$ para toda $m \in \mathbb{N}$ y

$$\vec{c}_0 \in \bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{I}_m = \bigcap_{m=1}^{\infty} I_m.$$

Por tanto existe m_0 tal que para toda $m \geq m_0, I_m \subseteq B(\vec{c}_0, \varepsilon) \subseteq B_{\alpha_0}$ pues el diametro de I_m tiende a 0 cuando $m \to \infty$, lo cual dice que I_m si era recubierto por un número finito de los conjuntos B_α's. Por tanto A es un conjunto compacto.

Ahora sea K un conjunto cerrado y acotado cualquiera. Existe

$$A = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n]$$

tal que $K \subseteq A$. Sea $\{B_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una cubierta abierta de K, por lo que $K \subseteq \bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} B_\alpha$ y $\mathcal{C}K$ es un conjunto abierto. Se sigue que

$$\mathbb{R}^n = K \cup \mathcal{C}K \subseteq \left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} B_\alpha\right) \cup \mathcal{C}K \quad \text{y} \quad A \subseteq \left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} B_\alpha\right) \cup \mathcal{C}K.$$

Por lo anteriormente visto, existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ tales que $A \subseteq B_{\alpha_1} \cup B_{\alpha_2} \cup \ldots \cup B_{\alpha_m} \cup \mathcal{C}K$. Puesto que $K \cap \mathcal{C}K = \emptyset$, se tiene que $K \subseteq B_{\alpha_1} \cup \ldots \cup B_{\alpha_m} = \bigcup\limits_{i=1}^{m} B_{\alpha_i}$. Por tanto K es un conjunto compacto. ❏

Ejemplos 3.1.6

(1).- El conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ es cerrado pero no es acotado. Por tanto el conjunto A no es compacto.

(2).- $\overline{B}(\vec{x}_0, \varepsilon)$ es cerrado y para toda $\vec{y} \in B(\vec{x}_0, \varepsilon)$, $\|\vec{y}\| \leq \|\vec{y} - \vec{x}_0\| + \|\vec{x}_0\| \leq \varepsilon + \|\vec{x}_0\|$. Por lo tanto también es acotado y por ende $\overline{B}(\vec{x}_0, \varepsilon)$ es compacto.

(3).- $[a, b]$ es compacto por ser cerrado y acotado.

(4).- $\overline{B(\vec{x}_0, \varepsilon)} = \overline{B}(\vec{x}_0, \varepsilon) \underset{\neq}{\supseteq} B(\vec{x}_0, \varepsilon)$. Por tanto $B(\vec{x}_0, \varepsilon)$ no es cerrado y donde se sigue que $B(\vec{x}_0, \varepsilon)$ no es compacto.

(5).- Sea K un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^p$. Definimos

$$co(K) := \{\vec{z} = t\vec{x} + (1-t)\vec{y} \in \mathbb{R}^p \mid \vec{x}, \vec{y} \in K \text{ y } t \in [0, 1]\}.$$

El conjunto $co(K)$ se llama la *cubierta convexa de* K. Probaremos que $co(K)$ es compacto en $\mathbb{R}^p$.

a) $co(K)$ es cerrado:

Sea $\{\vec{z}_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión convergente de puntos de $co(K)$, digamos que $\vec{z} = \lim\limits_{n\to\infty} \vec{z}_n$. Hay que ver que $\vec{z} \in co(K)$.

Para toda $n \in \mathbb{N}$, se tiene: $\vec{z}_n = t_n\vec{x}_n + (1-t_n)\vec{y}_n$ donde $\vec{x}_n, \vec{y}_n \in K$ y $t_n \in [0,1]$ ya que $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq K$ y K es acotado, se tiene que existe una subsucesión $\{\vec{x}_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ convergente a un punto $\vec{x} \in K$ pues K es cerrado.

A su vez, la sucesión $\{\vec{y}_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subseteq K$ es acotada. Por tanto existe una subsucesión $\{y_{n_{k_\ell}}\}_{\ell=1}^{\infty} \subseteq K$ convergente a un punto $\vec{y} \in K$. Por último la subsucesión $\{t_{n_{k_\ell}}\}_{\ell=1}^{\infty} \subseteq [0,1]$ es acotada. Por tanto existe una subsucesión $\{t_{n_{k_{\ell_m}}}\}_{m=1}^{\infty}$ convergente a un punto $t \in [0,1]$ pues $[0,1]$ es cerrado.

Entonces

$$\begin{aligned}\vec{z} &= \lim_{n\to\infty} \vec{z}_n = \lim_{n\to\infty} [t_n\vec{x}_n + (1-t_n)\vec{y}_n] = \\ &= \lim_{m\to\infty} \left[t_{n_{k_{\ell_m}}} \vec{x}_{n_{k_{\ell_m}}} + \left(1 - t_{n_{k_{\ell_m}}}\right) \vec{y}_{n_{k_{\ell_m}}} \right] = t\vec{x} + (1-t)\vec{y} \in co(K).\end{aligned}$$

Se sigue que $co(K)$ es cerrado.

b) $co(K)$ es acotado:

Por ser K compacto, existe $M > 0$ tal que $\|\vec{x}\| \leq M$ para toda $\vec{x} \in K$.

Sea $\vec{z} = t\vec{x} + (1-t)\vec{y} \in co(K), t \in [0,1], \vec{x}, \vec{y} \in K$. Entonces

$$\begin{aligned}\|\vec{z}\| &= \|t\vec{x} + (1-t)\vec{y}\| \leq \|t\vec{x}\| + \|(1-t)\vec{y}\| = |t|\|\vec{x}\| + |1-t|\|\vec{y}\| \leq \\ &\leq tM + (1-t)M = M.\end{aligned}$$

Por tanto $co(K)$ está acotado.

Así pues $co(K)$ es compacto.

(6).- Sean A un conjunto compacto en $\mathbb{R}^p$ y B un conjunto compacto en $\mathbb{R}^q$. Entonces $A \times B$ es compacto en $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q = \mathbb{R}^{p+q}$.

En efecto, sea $\{\vec{z}_n\}_{n=1}^{\infty}$, donde $\vec{z}_n = (\vec{x}_n, \vec{y}_n)$ con $\vec{x}_n \in A, \vec{y}_n \in B$ para toda $n \in \mathbb{N}$, una sucesión de puntos de $A \times B$. Vamos hallar una subsucesión de $\{\vec{z}_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge a un punto de $A \times B$. Con esto se probará que $A \times B$ es cerrado y puesto que claramente $A \times B$ está acotado se seguirá que $A \times B$ es compacto.

Ahora $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$ y A es un conjunto acotado. Entonces se tiene una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ convergente a un punto $\vec{x}_0 \in A$ pues A es un conjunto cerrado.

Ahora bien, $\{\vec{y}_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subseteq B$ y B es un conjunto acotado, por tanto tiene una subsucesión $\{\vec{y}_{n_{k_l}}\}_{\ell=1}^{\infty} \subseteq B$ convergente a un punto $\vec{y}_0 \in B$ pues B es un conjunto cerrado.

Por tanto $\lim\limits_{l\to\infty} \vec{z}_{n_{k_l}} = \lim\limits_{l\to\infty}(\vec{x}_{n_{k_l}}, \vec{y}_{n_{k_l}}) = (\vec{x}_0, \vec{y}_0) \in A \times B$.

En estos dos últimos ejemplos hemos desarrollado una técnica para probar que un conjunto es compacto por medio de sucesiones y en el siguiente teorema veremos la caracterización. Primero damos la siguiente:

Definición 3.1.7 Un subconjunto A de $\mathbb{R}^p$ se llama *secuencialmente compacto* si toda sucesión de puntos de A contiene una subsucesión que converge a un punto de A.

Teorema 3.1.8 *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^p$. Entonces A es un conjunto compacto $\iff$ toda sucesión $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$ tiene una subsucesión $\{\vec{x}_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ que converge a un punto de A.*

Es decir, A es compacto $\iff$ A es secuencialmente compacto.

Demostración.
$\Rightarrow$) Sea $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión contenida en A. Puesto que A es acotado, esta sucesión tiene una subsucesión $\{\vec{x}_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ convergente. Sea $\vec{x}_0 = \lim\limits_{k\to\infty} \vec{x}_{n_k}$. Puesto que $\{\vec{x}_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subseteq A$, se tiene $\vec{x}_0 \in \overline{A} = A$, por lo que $\vec{x}_0 \in A$.
$\Leftarrow$) Sea $\vec{x}_0 \in \overline{A}$. Entonces existe $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$ tal que $\vec{x}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \vec{x}_0$. Ahora, para toda subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ se tiene $\vec{x}_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \vec{x}_0$.

Por tanto $\vec{x}_0 \in A$ y A es cerrado.

Ahora si A no fuese acotado, para cada $n \in \mathbb{N}$, existiría $\vec{x}_n \in A$ tal que $\|\vec{x}_n\| \geq n$. Si $\{\vec{x}_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ es una subsucesión de $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\|\vec{x}_{n_k}\| \geq n_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$. Por lo tanto $\{\vec{x}_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ no converge, lo cual es absurdo. Por tanto A *es acotado* y por tanto A es compacto. ❏

3.2 Topología relativa y conjuntos conexos

Definición 3.2.1 Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Un subconjunto $B \subseteq A$ se llama *abierto en A* si existe un conjuunto abierto $\mathcal{U}$ en $\mathbb{R}^n$ $\quad B = \mathcal{U} \cap A$.

Un subconjunto $C \subseteq A$ se llama *cerrado en A* si existe un conjunto cerrado F en $\mathbb{R}^n$ tal que $C = F \cap A$.

Ejemplos 3.2.2

(1).- Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$, entonces $A \subseteq A, \emptyset \subseteq A$ y ambos son abiertos y cerrados a la vez en A pues: $A = A \cap \mathbb{R}^n, \emptyset = A \cap \emptyset$ y $\emptyset$ y $\mathbb{R}^n$ son abiertos y cerrados a la vez en $\mathbb{R}^n$.

(2).- En $[a, b]$, $(\,\frac{a+b}{2}, b\,] \subseteq [a, b]$ es un conjunto abierto en $[a, b]$ pues se tiene que $(\,\frac{a+b}{2}, b\,] = \left(\frac{a+b}{2}, \infty\right) \cap [a, b]$ y $\left(\frac{a+b}{2}, \infty\right)$ es abierto en $\mathbb{R}$.

El siguiente resultado nos dice que la topología relativa al conjunto A cumple las mismas propiedades que la topología de $\mathbb{R}^n$.

Teorema 3.2.3 *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces*

i).- *si $X \subseteq A$ es abierto en A, entonces $A \setminus X$ es cerrado en A.*

ii).- *si $Y \subseteq A$ es cerrado en A entonces $A \setminus Y$ es abierto en A.*

iii).- *La unión arbitraria de abiertos en A, es abierto en A.*

iv).- *La intersección finita de abiertos en A, es abierto en A.*

v).- *La unión finita de cerrados en A, es cerrado en A.*

vi).- *La intersección arbitraria de cerrados en A es cerrado en A.*

Demostración.

i).- Sea $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto tal que $X = A \cap \mathcal{U}$. Ahora bien:

$$A \setminus X = A \setminus (A \cap \mathcal{U}) = A \cap (A \cap \mathcal{U})^c = A \cap (A^c \cup \mathcal{U}^c) = (A \cap A^c) \cup (A \cap \mathcal{U}^c) = \\ = \emptyset \cup (A \cap \mathcal{U}^c) = A \cap \mathcal{U}^c$$

y $\mathcal{U}^c$ es cerrado en $\mathbb{R}^n$. Por lo tanto $A \setminus X$ es cerrado en $\mathbb{R}^n$.

ii).- Ejercicio.

iii).- Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una familia de conjuntos abiertos en A.
Sea $A_\alpha = A \cap \mathcal{U}_\alpha, \mathcal{U}_\alpha$ abierto en $\mathbb{R}^n$. Por lo tanto $\bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda} \mathcal{U}_\alpha$ es abierto en $\mathbb{R}^n$, por lo que $\bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha = \bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda} (A \cap \mathcal{U}_\alpha) = A \cap (\bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda} \mathcal{U}_\alpha)$ es abierto en A.

iv).- Sean $A_1, A_2, \ldots, A_m \subseteq A$ abiertos en A. Sea $A_i = A \cap \mathcal{U}_i$, donde $\mathcal{U}_i$ es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$, $1 \leq i \leq m$. Se tiene que $\bigcap\limits_{i=1}^{m} \mathcal{U}_i$ es abierto en $\mathbb{R}^n$. Por lo tanto $\bigcap\limits_{i=1}^{m} A_i = \bigcap\limits_{i=1}^{m} (A \cap \mathcal{U}_i) = A \cap (\bigcap\limits_{i=1}^{m} \mathcal{U}_i)$ el cual es abierto en A.

v)-vi) Ejercicio. ❏

Definición 3.2.4 Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ se llama *disconexo* si existen dos conjuntos abiertos $\mathcal{U}$ y V de $\mathbb{R}^n$ tales que

i).- $\mathcal{U} \cap A \neq \emptyset$, $V \cap A \neq \emptyset$,

ii).- $\mathcal{U} \cap V \cap A = \emptyset$,

iii).- $A \subseteq \mathcal{U} \cap V$. Equivalentemente, $(\mathcal{U} \cap A) \cup (V \cap A) = A$.

Definición 3.2.5 $A \subseteq \mathbb{R}^n$ se llama *conexo* si no es disconexo.

Geométricamente A es conexo si A consta de una sola pieza.

Ejemplos 3.2.6

(1).- $\mathbb{N}$ es disconexo.

En efecto, sean $\mathcal{U} = (-\infty, \pi), V = (\pi, \infty)$.

Se tiene que $2 \in \mathbb{N} \cap \mathcal{U}, 4 \in V \cap \mathbb{N}$ por lo que $\mathbb{N} \cap \mathcal{U} \neq \emptyset \neq \mathbb{N} \cap V$. (i)

Ahora: $(\mathcal{U} \cap \mathbb{N}) \cap (V \cap \mathbb{N}) = (\mathcal{U} \cap V) \cap \mathbb{N} = \emptyset \cap \mathbb{N} = \emptyset$. (ii)

Por último $\mathcal{U} \cap V = \mathbb{R} \setminus \{\pi\} \supseteq \mathbb{N}$. (iii)

Por tanto $\mathbb{N}$ es disconexo.

(2).- $[a, b] \in \mathbb{R}$ es conexo.

En efecto, si suponemos que $[a, b]$ no es conexo, existen $\mathcal{U}, V$ conjuntos abiertos de $\mathbb{R}$ tales que:

i).- $\mathcal{U} \cap [a, b] \neq \emptyset \neq V \cap [a, b]$.

ii).- $[a, b] \subseteq \mathcal{U} \cap V$.

iii).- $\mathcal{U} \cap V \cap [a, b] = \emptyset$.

Ahora bien $b \in \mathcal{U} \cup V$, digamos $b \in V$.

Sea $c = \sup(\mathcal{U} \cap [a, b])$.

Primero, $c > a$, pues si $c = a, a \in \mathcal{U} \cap [a, b]$, por tanto existe $\varepsilon > 0$ tal que $[a, a + \varepsilon) \subseteq \mathcal{U} \cap [a, b]$, lo cual es absurdo. Se sigue que $c > a$

Segundo, $c < b$ pues existe $\varepsilon > 0$ tal que $(b - \varepsilon, b] \subseteq V \cap [a, b]$. Por tanto $c \in (a, b)$.

Ahora $c \in \mathcal{U} \cup V$ por lo que $c \in \mathcal{U}$ ó $c \in V$.

Si $c \in \mathcal{U}$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \subseteq \mathcal{U} \cap [a, b]$. Por tanto $c + \varepsilon/2 \in (\mathcal{U} \cap [a, b])$ y $c + \varepsilon/2 > c$ lo cual contradice la definición de c.

Ahora si $c \in V$ entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \subseteq V \cap [a, b], B(c, \varepsilon) \cap (\mathcal{U} \cap [a, b]) = \emptyset$. Por tanto $\sup(\mathcal{U} \cap [a, b]) = c \leq c - \varepsilon/2$. Lo cual es absurdo. Así pues, $[a, b]$ es conexo.

De manera análoga se puede probar que $(-\infty, a]$, $(-\infty, a)$, (b, ∞), $[b, \infty)$, $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, $(a, b]$, $[a, b)$, (a, b) son conjuntos conexos de $\mathbb{R}$.

(3).- $\mathbb{Q}$ es disconexo pues si $\mathcal{U} = (-\infty, \pi)$ y $V = (\pi, \infty)$ se tiene que $\mathbb{Q} \subseteq \mathcal{U} \cap V = \mathbb{R} \backslash \{\pi\}, \mathcal{U} \cap V = \emptyset$ y $\mathbb{Q} \cap \mathcal{U} \neq \emptyset \neq \mathbb{Q} \cap V$.

(4).- Sea A un subconjunto conexo de $\mathbb{R}^n$. Si C es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ tal que $A \subseteq C \subseteq \overline{A}$, entonces C es conexo. En particular $\overline{A}$ es conexo.

Para probar esto, supongamos que C no fuese un conjunto conexo. En este caso existirán entonces dos conjuntos abiertos $\mathcal{U}$ y V de $\mathbb{R}^n$ tales que: $\mathcal{U} \cap C \neq \emptyset \neq V \cap C, \mathcal{U} \cap V \cap C = \emptyset$ y $C \subseteq \mathcal{U} \cap V$.

Puesto que $A \subseteq C$, entonces $A \subseteq \mathcal{U} \cap V$ y $\mathcal{U} \cap V \cap A = \emptyset$. Afirmamos que $C \subseteq \overline{A}$ implica que $\mathcal{U} \cap A \neq \emptyset \neq V \cap A$.

En efecto, puesto que $\mathcal{U} \cap C \neq \emptyset$ existe $\vec{x} \in \mathcal{U} \cap C$. Por ser $\mathcal{U}$ un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$, existe $r > 0$ tal que $B(\vec{x}, r) \subseteq \mathcal{U}$.

Ahora $\vec{x} \in C \subseteq \overline{A}$, luego, $B(\vec{x}, r) \cap A \neq \emptyset$ y así $\mathcal{U} \cap A \neq \emptyset$. Análogamente se tendría $V \cap A \neq \emptyset$.

Lo anterior diría que A no es conexo lo cual es absurdo. Por tanto C es conexo.

Proposición 3.2.7 *Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ una familia de conjuntos conexos en $\mathbb{R}^n$ tales que satisfacen $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \neq \emptyset$. Entonces $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$ es conexo.*

<u>*Demostración*</u>.

Supongamos que $B = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$ es disconexo, por lo que existen dos conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{U}$ y V, tales que $B \subseteq \mathcal{U} \cup V, \mathcal{U} \cap B \neq \emptyset \neq V \cap B$ y $\mathcal{U} \cap V \cap B = \emptyset$.

Ahora cada A_α, $\alpha \in \Lambda$, es conexo y se tiene que $A_\alpha \subseteq B \subseteq \mathcal{U} \cup V$ y $A_\alpha \cap \mathcal{U} \cap V \subseteq B \cap \mathcal{U} \cap V = \emptyset$, por lo que $A_\alpha \cap \mathcal{U} \cap V = \emptyset$. Por tanto se debe tener $A_\alpha \cap V = \emptyset$ o $A_\alpha \cap \mathcal{U} = \emptyset$ lo cual implica que $A_\alpha \subseteq \mathcal{U}$ o $A_\alpha \subseteq V$.

Sean $\Lambda_1 = \{\alpha \in \Lambda \mid A_\alpha \subseteq \mathcal{U}\}, \Lambda_2 = \{\beta \in \Lambda \mid A_\beta \subseteq V\}$. Claramente $\Lambda_1 \cup \Lambda_2 = \Lambda$. Supongamos que $\Lambda_1 \neq \emptyset$ y $\Lambda_2 \neq \emptyset$, entonces sean $I_1 = \bigcup_{\alpha \in \Lambda_1} A_\alpha$ y $I_2 = \bigcup_{\beta \in \Lambda_2} A_\beta$. Puesto que $A_\alpha \neq \emptyset$ para toda $\alpha \in \Lambda$ y $\Lambda_1 \neq \emptyset, \Lambda_2 \neq \emptyset$, entonces $I_1 \neq \emptyset, I_2 \neq \emptyset$.

Ahora $I_1 \cup I_2 = (\bigcup_{\alpha \in \Lambda_1} A_\alpha) \cup (\bigcup_{\beta \in \Lambda_2} A_\beta) = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha = B, I_1 \cap I_2 \supseteq \bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \neq \emptyset$ pero $I_1 \cap I_2 \subseteq \mathcal{U} \cap V \cap B = \emptyset$, lo cual es imposible. Por tanto $\Lambda_1 = \emptyset$ o $\Lambda_2 = \emptyset$. De aquí, $\Lambda_1 = \Lambda$ o $\Lambda_2 = \Lambda$, con lo cual se sigue que $I_1 = B$ o $I_2 = B$. Se sigue que $A_\alpha \subseteq \mathcal{U}$ para toda $\alpha \in \Lambda$ o $A_\alpha \subseteq V$ para toda $\alpha \in \Lambda$. Digamos $A_\alpha \subseteq \mathcal{U}$ para toda $\alpha \in \Lambda$. Entonces $V \cap B = \emptyset$ lo cual es una contradicción. Por tanto $B = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$ es un conjunto conexo. ❑

Observación 3.2.8 Sean $A = (0, 1)$, $B = (1, 2)$, A y B conjuntos conexos pero $A \cup B$ no es conexo lo cual nos dice que la hipótesis $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \neq \emptyset$ es necesaria en la proposición anterior

El siguiente resultado nos caracteriza a los conjuntos conexos, por medio de su topología relativa.

Proposición 3.2.9 *A es un conjunto conexo $\iff$ los únicos conjuntos abiertos y cerrados a la vez en A son $\emptyset$ y A mismo.*

<u>*Demostración*</u>.
$\Rightarrow$) Sea $A_1 \neq A$, $A_1 \neq \emptyset$ tal que A_1 es abierto y cerrado a la vez en A. Por lo tanto $A_2 = A \setminus A_1$ es tal que $A_2 \neq A, A_2 \neq \emptyset$ y A_2 es abierto y cerrado a la vez en A.

Sean $A_1 = A \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$, $A_2 = A \cap V \neq \emptyset$ con $\mathcal{U}$ y V conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^n$.

Se tiene $A \cap \mathcal{U} \cap V = A_1 \cap A_2 = \emptyset$ y $A = A_1 \cup A_2 \subseteq \mathcal{U} \cup V$, por lo que con $\mathcal{U}$ y V se cumple que A es disconexo, lo cual implica que los únicos abiertos y cerrados en A son $\emptyset$ y A.

$\Leftarrow$) Supongamos ahora que A es disconexo. Entonces existen $\mathcal{U}$ y V abiertos en $\mathbb{R}^n$ tales que $A \cap \mathcal{U} \neq \emptyset \neq A \cap V, A \subseteq \mathcal{U} \cup V$ y $A \cap \mathcal{U} \cap V = \emptyset$.

Sea $A_1 = A \cap \mathcal{U}, A_1$ es abierto en A.

Sea $A_2 = A \cap V, A_1 \cup A_2 = A \cap (\mathcal{U} \cup V) = A$ y $A_1 \cap A_2 = A \cap \mathcal{U} \cap V = \emptyset$, por lo que $A_1 = A \setminus A_2$ y como A_2 es abierto en A, entonces A_1 es cerrado en A por lo que A_1 es abierto y cerrado a la vez en A con $A_1 \neq \emptyset$ y $A_1 \neq A$ (pues $A_2 \neq \emptyset$). Por tanto A es conexo. ❏

Definición 3.2.10 (Provisional) Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Una función $f : [0,1] \to A$ se llama *continua en* $t_0 \in [0,1]$ $\iff$ para toda sucesión $\{t_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq [0,1]$ tal que $t_n \xrightarrow[n\to\infty]{} t_0$, se tiene que $f(t_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(t_0)$.

La función f se llama *continua* si f es continua en t para toda $t \in [0,1]$.

Definición 3.2.11 Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$. A se llama *arco-conexo* si para cualesquiera $\vec{x}_0, \vec{y}_0 \in A$, existe una función $f : [0,1] \to A$ continua tal que $f(0) = \vec{x}_0$ y $f(1) = \vec{y}_0$.

Si $f : [0,1] \to A$ es una función continua, f se llama una *curva* en A. Es decir, A es arco conexo si para cualesquiera $\vec{x}_0, \vec{y}_0 \in A$ existe una curva en A que conecta $\vec{x}_0$ con $\vec{y}_0$.

Ejemplos 3.2.12

(1).- Dados $\vec{x}_0, \vec{y}_0 \in \mathbb{R}^n$, sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ dado por $f(t) = \vec{x}_0 + t(\vec{y}_0 - \vec{x}_0) = (1-t)\vec{x}_0 + t\vec{y}_0$.

Se tiene que $f(t)$ es continua en $t_0 \in [0,1]$ pues si $\{t_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq [0,1], t_n \xrightarrow[n\to\infty]{} t_0$, entonces $f(t_n) = \vec{x}_0 + t_n(\vec{y}_0 - \vec{x}_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} \vec{x}_0 + t_0(\vec{y}_0 - \vec{x}_0) = f(t_0)$. Por lo que f es una curva. Al conjunto

$$[\vec{x}_0, \vec{y}_0] = \{\vec{x}_0 + t(\vec{y}_0 - \vec{x}_0) \mid t \in [0,1]\} = \{(1-t)\vec{x}_0 + t\vec{y}_0 \mid t \in [0,1]\}$$

se le llama el *segmento* entre $\vec{x}_0$ y $\vec{y}_0$ pues $f([0,1]) = [\vec{x}_0, \vec{y}_0]$ y $f(0) = \vec{x}_0$, $f(1) = \vec{y}_0$.

(2).- Sea $A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y = \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} \right\}$.

Veremos que A es arco conexo. Sean (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \in A$. Podemos suponer que $0 < x_1 \leq x_2$. Sea $g\colon [x_1, x_2] \to A$, $g(s) = \left(s, \operatorname{sen} \dfrac{1}{s} \right)$. La función g es continua en $[x_1, x_2]$ y $g(x_1) = (x_1, y_1)$, $g(x_2) = (x_2, y_2)$.

Ahora sea $\varphi : [0,1] \to [x_1, x_2]$ la función $\varphi(t) = (1-t)x_1 + tx_2$. Entonces φ es una función continua en $[0,1]$ y $\varphi(0) = x_1, \varphi(1) = x_2$. Entonces la función $f : [0,1] \to A$ dada por $f(t) = g(\varphi(t))$ es una función continua tal que $f(0) = g(\varphi(0)) = g(x_1) = (x_1, y_1)$ y $f(1) = g(\varphi(1)) = g(x_2) = (x_2, y_2)$. Así, A es arco conexo.

Definición 3.2.13 Sean $\vec{x}_0, \vec{y}_0 \in \mathbb{R}^n$, se define el *segmento entre* $\vec{x}_0$ *y* $\vec{y}_0$ *por:*

$$[\vec{x}_0, \vec{y}_0] = \{\vec{x}_0 + t(\vec{y}_0 - \vec{x}_0) \mid t \in [0,1]\} = \{(1-t)\vec{x}_0 + t\vec{y}_0 \mid t \in [0,1]\}.$$

Definición 3.2.14 A se llama *convexo* si $[\vec{x}_0, \vec{y}_0] \subseteq A$ para cualesquiera $\vec{x}_0, \vec{y}_0 \in A$.

Observación 3.2.15 Si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es convexo, entonces A es arco conexo.

En efecto, si $\vec{x}_0, \vec{y}_0 \in A, [\vec{x}_0, \vec{y}_0] \subseteq A$ por lo que $f : [0,1] \to A$ dada por $f(t) = \vec{x}_0 + t(\vec{y}_0 - \vec{x}_0)$ es una curva que une $\vec{x}_0$ son $\vec{y}_0$.

Teorema 3.2.16 *Si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es arco conexo, entonces A es conexo. En particular si A es convexo, entonces A es conexo.*

<u>*Demostración*</u>. Supongamos que A es disconexo. Por lo tanto existen $\mathcal{U}$, V conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^n$ tales que $\mathcal{U} \cap A \neq \emptyset \neq V \cap A$, $A \subseteq \mathcal{U} \cup V$ y $A \cap \mathcal{U} \cap V = \emptyset$.

Sean $\vec{x}_0 \in \mathcal{U} \cap A, \vec{y}_0 \in V \cap A$. Existe una función continua $f : [0,1] \to A$ tal que $f(0) = \vec{x}_0, f(1) = \vec{y}_0$.

Sean

$$I_1 = f^{-1}(\mathcal{U} \cap A) = f^{-1}(\mathcal{U}) \cap f^{-1}(A) = f^{-1}(\mathcal{U}) \cap [0,1] = f^{-1}(\mathcal{U}),$$
$$I_2 = f^{-1}(V \cap A) = f^{-1}(V) \cap f^{-1}(A) = f^{-1}(V) \cap [0,1] = f^{-1}(V).$$

<u>$I_1 = f^{-1}(\mathcal{U})$ es cerrado en $[0,1]$:</u>

Sea $t_0 \in \overline{f^{-1}(\mathcal{U})}$. Existe $\{t_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq f^{-1}(\mathcal{U})$ (y por tanto $f(t_n) \in \mathcal{U}$) tal que $t_n \xrightarrow[n\to\infty]{} t_0$ lo cual implica que $f(t_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(t_0) \in A$ (por ser f continua). Si $f(t_0) \in V$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$, $f(t_n) \in V \cap \mathcal{U} \cap A \neq \emptyset$, que es imposible. Por lo tanto $f(t_0) \notin V$, de donde $f(t_0) \in \mathcal{U}$ y $t_0 \in f^{-1}(\mathcal{U}) = I_1$. Por lo tanto I_1 es cerrado en $[0,1]$.

Análogamente I_2 es cerrado en $[0,1]$.

Ahora $I_1 \cup I_2 = f^{-1}(\mathcal{U}) \cup f^{-1}(V) = f^{-1}(\mathcal{U} \cup V) = f^{-1}(A) = [0,1]$ y $I_1 \cap I_2 = f^{-1}(\mathcal{U} \cap A) \cap f^{-1}(V \cap A) = f^{-1}(\mathcal{U} \cap V \cap A) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$. Por lo tanto $I_1 = [0,1] \setminus I_2$ y I_1 es abierto en $[0,1]$.

Ahora $0 \in I_1$ pues $\vec{x}_0 = f(0) \in \mathcal{U}$, por lo que $0 \in f^{-1}(\{\vec{x}_0\}) \subseteq f^{-1}(\mathcal{U}) = I_1$ y $1 \in I_2$ pues $\vec{y}_0 = f(1) \in V$. Por lo tanto $1 \in f^{-1}(\{\vec{y}_0\}) \subseteq f^{-1}(V) = I_2$. Se sigue que $I_1 \neq \emptyset, I_2 \neq \emptyset$. Por lo tanto $I_1 \neq [0,1]$, por lo que I_1 es abierto y cerrado en $[0,1]$ con $I_1 \neq \emptyset, I_1 \neq [0,1]$ lo que contradice que $[0,1]$ es conexo. Así A es conexo. ❏

Observación 3.2.17 El recíproco de este teorema no es cierto, como lo demuestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.2.18 Sea $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}, y \in [0,1]\right\} \cup \{(0,1)\} \cup ([0,1] \times \{0\})$.

Primero veamos que $A_* = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}, y \in [0,1]\right\} \cup ([0,1] \times \{0\})$ es conexo.

Sea $A_n = \left(\left\{\dfrac{1}{n}\right\} \times [0,1]\right) \cup ([0,1] \times \{0\})$. Entonces A_n es un conjunto conexo pues $\left\{\dfrac{1}{n}\right\} \times [0,1]$ y $[0,1] \times \{0\}$ son conexos y $\left(\left\{\dfrac{1}{n}\right\} \times [0,1]\right) \cap ([0,1] \times \{0\}) = \left\{\left(\dfrac{1}{n}, 0\right)\right\} \neq \emptyset$. Además $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = [0,1] \times \{0\} \neq \emptyset$. Por lo tanto $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = A_*$ es conexo.

Si $\mathcal{U}$ y V son dos conjuntos abiertos tales que $A \cap \mathcal{U} \cap V = \emptyset$ y $A \subseteq \mathcal{U} \cup V$, entonces $(0,1) \in \mathcal{U}$ o $(0,1) \in V$. Digamos que $(0,1) \in \mathcal{U}$, lo cual implica que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\left(\dfrac{1}{n}, 1\right) \in \mathcal{U}$ para alguna n. Se sigue que $\mathcal{U} \cap A_* \neq \emptyset$. Por lo tanto $V \cap A_* = \emptyset$ (pues de lo contario A_* no sería conexo). Esto implica que $A \subseteq \mathcal{U}$. Así A es conexo.

Ahora veamos que A no es arco conexo. Sea $\vec{x}_0 = (0,1)$. Sea $\varphi : [0,1] \to A$ tal que $\varphi([0,1]) \ni \vec{x}_0$ con φ continua. Sea $B = \varphi^{-1}(\{\vec{x}_0\}) \neq \emptyset$. Por ser φ continua se sigue que B es cerrado en $[0,1]$ pues si $t \in \overline{B}$, existe $\{t_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq B$ tal que $t_n \to t_0$, por lo que siendo φ continua, se tiene $\varphi(t_n) = \vec{x}_0 \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi(t)$. Por lo tanto $\varphi(t) = \vec{x}_0$ y $t \in B$.

Veamos que B es un conjunto abierto en $[0,1]$. Sea V una vecindad abierta de $\vec{x}_0$ tal que $V \cap (\mathbb{R} \times \{0\}) = \emptyset$ (por ejemplo $V = B\left(\vec{x}_0, \dfrac{1}{2}\right)$). Se tendrá que $\varphi^{-1}(V)$ es abierto en $[0,1]$ (como se verá posteriormente).

Sea $\varepsilon > 0$ tal que $H = (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \cap [0,1] \subseteq \varphi^{-1}(V)$. Se tiene que H es conexo y $\varphi(H) \subseteq V \cap A$, (que $\varphi(H)$ es conexo se sigue de la demostración del teorema anterior, pero posteriormente se probará un resultado mucho más general). Supongamos que existe $t' \in H$ tal que $\varphi(t') \neq \vec{x}_0 = \varphi(t_0)$. Sea $\varphi(t') = \left(\dfrac{1}{n_0}, y_0\right)$ con $y_0 > 0$.

Sea $z_0 \in \mathbb{R}$ tal que $0 < z_0 < \dfrac{1}{n_0}$ y $z \neq \dfrac{1}{n}$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Sean

$$\mathcal{U} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > z_0\}, \quad W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < z_0\},$$
$$\mathcal{U} \cup W = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = z_0\}.$$

Entonces $\varphi(H) \subseteq V \cap A \subseteq \mathcal{U} \cup W$. Ahora $\varphi(t') \in \mathcal{U} \cap \varphi(H)$ y $\varphi(t_0) = \vec{x}_0 \in W \cap \varphi(H)$. Por lo tanto $\mathcal{U} \cap \varphi(H) \neq \emptyset \neq W \cap \varphi(H)$. Además $\mathcal{U} \cap W = \emptyset$ y $\mathcal{U}$, W son conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^2$. Por lo tanto $\varphi(H)$ no sería conexo lo cual es una contradicción. Por tanto $H \subseteq B$ y B es abierto en $[0,1]$.

El conjunto B es abierto y cerrado en $[0,1]$, $B \neq \emptyset$ y el conjunto $[0,1]$ es conexo, lo cual implica que $B = [0,1]$. Por lo tanto $\varphi^{-1}(\{\vec{x}_0\}) = [0,1]$. Se sigue que $\vec{x}_0 = (0,1)$ no se puede unir con ningún otro punto de A_1, es decir, A no es arco conexo. Por lo tanto A es un conjunto conexo que no es arco conexo.

Sin embargo se tiene que si A es conexo y abierto, entonces A es arco conexo. La demostración es un ejercicio.

Ejemplos 3.2.19

(1).- $B(\vec{a}, \varepsilon)$ es un conjunto convexo.

En efecto sean $\vec{x}, \vec{y} \in B(\vec{a}, \varepsilon)$. Por lo tanto $\|\vec{x} - \vec{a}\| < \varepsilon$ y $\|\vec{y} - \vec{a}\| < \varepsilon$. Sea $\vec{z} \in [\vec{x}, \vec{y}], \vec{z} = \vec{x} + t(\vec{y} - \vec{x}), t \in [0,1]$. Entonces

$$\begin{aligned}\|\vec{z} - \vec{a}\| &= \|\vec{x} + t(\vec{y} - \vec{x}) - \vec{a}\| = \|(1-t)\vec{x} + t\vec{y} - \vec{a}\| = \\ &= \|(1-t)\vec{x} + t\vec{y} - [(1-t)\vec{a} + t\vec{a}]\| = \|(1-t)(\vec{x} - \vec{a}) + t(\vec{y} - \vec{a})\| \leq \\ &\leq |1-t|\|\vec{x} - \vec{a}\| + |t|\|\vec{y} - \vec{a}\| = (1-t)\|\vec{x} - \vec{a}\| + t\|\vec{y} - \vec{a}\| < \\ &< (1-t)\varepsilon + t\varepsilon = \varepsilon.\end{aligned}$$

Por lo tanto $z \in B(\vec{a}, \varepsilon)$. Se sigue que $[\vec{x}, \vec{y}] \subseteq B(\vec{a}, \varepsilon)$. Así pues $B(\vec{a}, \varepsilon)$ es un conjunto convexo y por tanto $B(\vec{a}, \varepsilon)$ es un conjunto arco conexo y $B(\vec{a}, \varepsilon)$ es conexo.

(2).- Se tiene que $\mathbb{R}^n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B(\vec{0}, n) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n, G_n$ es conexo para toda $n \in \mathbb{N}$ y $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n = B(\vec{0}, 1) \neq \emptyset$. Por lo tanto $\mathbb{R}^n$ es conexo.

Esto mismo se demuestra más fácil viendo que claramente, $\mathbb{R}^n$ es convexo pues para cualesquiera $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n, [\vec{x}, \vec{y}] \subseteq \mathbb{R}^n$ por lo que $\mathbb{R}^n$ es conexo.

3.3 Ejercicios

1) Usando la definición de conjunto compacto, demostrar las siguientes afirmaciones:

   a) $(0,1] \times \{1\}$ no es compacto en $\mathbb{R}^2$.

   b) Sea $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathbb{R}^p$. Supongamos que $\vec{x} = \lim\limits_{n\to\infty} \vec{x}_n$. Entonces el conjunto $\{\vec{x}_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\vec{x}\}$ es compacto en $\mathbb{R}^p$.

c) Sea $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathbb{R}^p$. Supongamos que $\vec{x} = \lim_{n\to\infty} \vec{x}_n$ y que $\vec{x}_n \neq \vec{x}$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\{\vec{x}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ no es compacto en $\mathbb{R}^p$.

Sugerencia: Para $n \in \mathbb{N}$, sea $r_n = \frac{1}{2}\|\vec{x}_n - \vec{x}\|$ y $G_n = B(\vec{x}_n, r_n)$. Entonces $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una cubierta abierta que no tiene subcubiertas finitas.

d) Sea K compacto en $\mathbb{R}^n$ y $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Entonces $\vec{x}_0 + K$ es compacto en $\mathbb{R}^n$.

Sugerencia: Usar el Ejercicio 11 a) del segundo capítulo.

e) $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^p \mid \|\vec{x}\| \leq 1\}$ es compacto.

2) a) Sean A un cerrado en $\mathbb{R}^p$ y B un compacto en $\mathbb{R}^p$ tales que $A \cap B = \emptyset$. Usando la definición de conjunto compacto, probar que existe un $\varepsilon > 0$ tal que $\|\vec{x} - \vec{y}\| \geq \varepsilon$ para toda $\vec{x} \in A$, $\vec{y} \in B$.

b) Dar un ejemplo en $\mathbb{R}$ de dos conjuntos A, B cerrados tales que $A \cap B = \emptyset$ pero que no se cumpla la conclusión del inciso a).

3) Sean A, B dos subconjuntos de $\mathbb{R}^p$. Se define la *distancia entre* A *y* B por: $d(A, B) = \inf\{\|\vec{x} - \vec{y}\| \mid \vec{x} \in A, \vec{y} \in B\}$.

a) Demostrar que $\vec{x} \in \overline{A} \iff d(\{\vec{x}\}, A) = 0$.

b) Supongamos que A es cerrado y B es compacto en $\mathbb{R}^p$. Probar que $A \cap B = \emptyset \iff d(A, B) > 0$.

Sugerencia: Usar el Ejercicio 2 a).

4) Mediante el Teorema de Heine-Borel, decidir cuales de los siguientes conjuntos son compactos, justificando la respuesta:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$.

b) $[0, 1] \cup [2, 3] \cup \ldots \cup [2n, 2n + 1] \cup \ldots$

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{Q} \text{ y } a \leq x \leq b\}$.

d) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq y \leq 1\}$.

e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 1\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 5\}$.

f) $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^p \mid \|\vec{x} - \vec{a}\| = r\}$.

g) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{Q} \text{ y } x^2 \leq 2\}$.

5) Usando el Teorema de Heine-Borel, probar que el conjunto:

$$\mathbb{T} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 = (2 - \lambda)^2, \text{ donde } \lambda^2 = 1 - z^2\}$$

es compacto en $\mathbb{R}^3$. El conjunto $\mathbb{T}$ se llama *toro geométrico*. Este conjunto tiene la forma de una cámara de llanta. Hacer el dibujo en el 1er. octante.

6) Sean $A \subseteq \mathbb{R}^p$, $B \subseteq \mathbb{R}^q$ conjuntos no vacíos. Demostrar que A es cerrado en $\mathbb{R}^p$ y B es cerrado en $\mathbb{R}^q \iff A \times B$ es cerrado en $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$. Deducir que A es compacto en $\mathbb{R}^p$ y B es compacto en $\mathbb{R}^q \iff A \times B$ es compacto en $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$.

7) Probar que si A es conjunto acotado en $\mathbb{R}^n, \overline{A}$ es compacto.

8) Sea K un conjunto compacto en $\mathbb{R}^n$ y sea F un conjunto cerrado contenido en K. Demostrar que F es compacto.

9) Sea A un subconjunto compacto en $\mathbb{R}^p$. Supóngase que $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy de puntos de A. Mostrar que $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente y que converge a un punto de A.

10) Usando el hecho de que $[-1, 1]$ es secuencialmente compacto en $\mathbb{R}$, demostrar que existe una sucesión $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de enteros tales que $n_k < n_{k+1}$ para toda $k \in \mathbb{N}$ y que exista $\lim\limits_{k \to \infty} \operatorname{sen}(n_k)$.

11) Sea $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de conjuntos compactos no vacíos en $\mathbb{R}^p$ tales que $F_{n+1} \subseteq F_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Demostrar que $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$.

12) Sea $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^p$ tales que $V_n \neq \emptyset$, $\overline{V}_n$ es compacto y $\overline{V}_n \subseteq V_{n-1}$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Probar que $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} V_n \neq \emptyset$. Dar un ejemplo en $\mathbb{R}^2$, donde la conclusión sea falsa si $\overline{V}_n$ no es compacto.

13) Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Probar que si $B \subseteq A$ es abierto en A, entonces $A \backslash B = A \cap B^c$ es cerrado en A. Recíprocamente, si $B \subseteq A$ es cerrado en A, entonces $A \backslash B = A \cap B^c$ es abierto en A.

14) Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Probar que la unión finita de conjuntos cerrados en A es un conjunto cerrado en A y que la intersección arbitraria de conjuntos cerrados en A es un conjunto cerrado en A.

15) Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Demostrar que A es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$ si y sólo si todo conjunto abierto en A es abierto en $\mathbb{R}^n$. También, A es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^n$ si y sólo si todo conjunto cerrado en A, es cerrado en $\mathbb{R}^n$.

16) Sea A un subconjunto conexo de $\mathbb{R}^n$ con más de un punto. Demostrar que $A \subseteq A'$.

    Sugerencia: $\overline{A} \cup \{\text{puntos aislados de } A\}$. Probar que A no tiene puntos aislados.

17) Sean M, N dos conjuntos abiertos disjuntos de $\mathbb{R}^n$ y sea D un conexo no vacío en $\mathbb{R}^n$ tal que $D \subseteq M \cup N$. Demostrar que $D \subseteq M$ o $D \subseteq N$.

18) Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$. Probar que A es conexo $\iff$ A es un intervalo.

    Sugerencia: Es fácil ver que si A no es un intervalo, entonces no es conexo. Ya se probó que $[a, b]$ es conexo. Cualquier otro intervalo se puede conseguir como una unión de intervalos, cerrados cuya intersección total es no vacía.

19) Sea A el conjunto siguiente:

    a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1\} \cup \{(x, 0) | 1 < x < 2\}$.
    b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2y < x\}$.
    c) $\overline{B}(\vec{0}, 1) \setminus \{\vec{0}\}$ en $\mathbb{R}^n$.
    d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \cos 2\pi x\}$.
    e) $\overline{B}(\vec{0}, 1) \cup \overline{B}((4, 0), 1)$ en $\mathbb{R}^2$.

    ¿Es A conexo? ¿Es A arco conexo? ¿Es A convexo? Justificar la respuesta.

20) Sea B un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$. Si B es conexo, probar que B es arco conexo.

    Sugerencia: Tomar $\vec{b} \in B$ y sea $T = \{\vec{y} \in B \mid \text{existe } \varphi : [0, 1] \to B \text{ continua}, \varphi(0) = \vec{b}, \varphi(1) = \vec{y}\}$. Probar que $T \neq \emptyset$ y que T es abierto y cerrado a la vez en B.

21) Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Demostrar que si existen dos conjuntos abiertos $\mathcal{U}, V$ en $\mathbb{R}^n$ tales que $\mathcal{U} \cap V = \emptyset, A \cap V \neq \emptyset \neq A \cap \mathcal{U}$ y $A \subseteq \mathcal{U} \cup V$, entonces A es disconexo.

22) Sea $A \subseteq \mathbb{R}^p$ un conjunto disconexo. Probar que existen dos conjuntos abiertos $\mathcal{U}$, V en $\mathbb{R}^p$ tales que $\mathcal{U} \cap V = \emptyset, A \cap \mathcal{U} \neq \emptyset \neq A \cap V$ y $A \subseteq \mathcal{U} \cup V$.

    Sugerencia: Sean $\mathcal{U}_1$, V_1 dos conjuntos abiertos de $\mathbb{R}^p$ tales que $\mathcal{U}_1 \cap A \neq \emptyset \neq V_1 \cap A, \mathcal{U}_1 \cap V_1 \cap A = \emptyset$ y $A \subseteq \mathcal{U}_1 \cup V_1$. Definimos:

    $$\mathcal{U} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^p \mid d(\vec{x}, A_1) < d(\vec{x}, A_2)\}, \quad V = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^p \mid d(\vec{x}, A_2) < d(\vec{x}, A_1)\},$$

    donde $A_1 = A \cap \mathcal{U}$ y $A_2 = A \cap V_1$. Entonces $\mathcal{U}$ y V satisfacen lo deseado (probar que si $\vec{x}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \vec{x}$ entonces $d(\vec{x}_n, B) \xrightarrow[n\to\infty]{} d(\vec{x}, B)$).

23) Sea $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de conjuntos compactos, conexos, no vacíos en $\mathbb{R}^p$ tales que:

$$F_{n+1} \subseteq F_n \tag{$*$}$$

para toda $n \in \mathbb{N}$. Sea $F = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$. Demostrar que F es un conjunto compacto conexo no vacío.

Sugerencia: Es fácil probar que F es compacto no vacío. Supongamos que F no es conexo. Por el Ejercicio 22, existen $\mathcal{U}$, V conjuntos abiertos de $\mathbb{R}^p$ tales que $\mathcal{U} \cap V = \emptyset, \mathcal{U} \cap F \neq \emptyset \neq V \cap F$ y $F \subseteq \mathcal{U} \cup V$.

Probar que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $F_{n_0} \subseteq \mathcal{U} \cap V$ y llegar a una contradicción.

Para probar que $F_{n_0} \subseteq \mathcal{U} \cup V$ para algún $n_0 \in \mathbb{N}$, razonar por reducción al absurdo y usar la compacidad de los F_n junto con $(*)$.

24) Dar un ejemplo de una sucesión $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ de conjuntos cerrados conexos en $\mathbb{R}^2$ tales que $F_{n+1} \subseteq F_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, pero que $F = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ no sea conexo.

25) Sean A un subconjunto de $\mathbb{R}^p, B$ un subconjunto de $\mathbb{R}^q, A$ y B no vacíos. Probar lo siguiente:

a) A convexo y B convexo $\iff$ $A \times B$ es convexo en $\mathbb{R}^{p+q}$.

b) A arco conexo y B arco conexo $\iff$ $A \times B$ es arco conexo en $\mathbb{R}^{p+q}$.

Capítulo 4

Funciones en $\mathbb{R}^n$

4.1 Límites de funciones y funciones continuas

Los conceptos de límites de funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ y de funciones continuas son completamente análogos al caso de las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Más aún los principales resultados son los mismos y se pueden caracterizar los límites y la continuidad por medio de los componentes que serán funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

Por último se verá que la compacidad y la conexidad se preservan bajo funciones continuas, es decir, son propiedades topológicas.

Definición 4.1.1 Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Sea $\vec{x}_0 \in A'$ un punto de acumulación de A. Entonces se dice que el *límite de $f(\vec{x})$, cuando $\vec{x}$ tiende a $\vec{x}_0$, es* $\vec{\ell} \in \mathbb{R}^m$ y se denota $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = \vec{\ell}$ o $f(\vec{x}) \xrightarrow[\vec{x}\to\vec{x}_0]{} \vec{\ell}$ si para toda $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta$ y $\vec{x} \in A$ entonces $\|f(\vec{x}) - \vec{\ell}\| < \varepsilon$. Equivalentemente, si para toda $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $f\left([B(\vec{x}_0, \delta) \cap A] \setminus \{\vec{x}_0\}\right) \subseteq B(\vec{\ell}, \varepsilon)$.

Ejemplo 4.1.2 Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (xy, (\operatorname{sen} z) \cdot x)$.

Entonces $\lim\limits_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} f(x, y, z) = (x_0 y_0, (\operatorname{sen} z_0) \cdot x_0)$. La justificación se verá más adelante.

Teorema 4.1.3 *Si $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x})$ existe, entonces este límite es único.*

<u>*Demostración*</u>. Ejercicio. ❏

Teorema 4.1.4 *Supongamos que $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x})$ y $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} g(\vec{x})$ existen. Entonces:*

i).- $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} (f(\vec{x}) + g(\vec{x})) = \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) + \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} g(\vec{x})$.

ii).- *Si* $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \lambda f(\vec{x}) = \lambda \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x})$.

<u>*Demostración*</u>. Ejercicio. ❑

Definición 4.1.5 Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n, f : A \to \mathbb{R}^m$. Sea $\vec{x}_0 \in A$. Se dice que f es continua en A si para toda $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para toda $\vec{x} \in A$ con $\|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta$ implica $\|f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)\| < \varepsilon$.

Observaciones 4.1.6

(1).- Si $\vec{x}_0 \in A \cap A'$, entonces f es continua en $\vec{x}_0 \iff \lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x}_0} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0)$.

(2).- Si $\vec{x}_0 \in A, \vec{x}_0 \notin A'$, es decir $\vec{x}_0$ es un *punto aislado*, entonces existe $\delta_0 > 0$ tal que $B(\vec{x}_0, \delta_0) \cap A = \{\vec{x}_0\}$. Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $\delta_0 > 0$ tal que $B(\vec{x}_0, \delta_0) \cap A = \{\vec{x}_0\}$. Sea $\varepsilon > 0$, entonces sea $\delta = \delta_0$, por lo que para toda $\vec{x} \in A, \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta = \delta_0$ implica $\vec{x} = \vec{x}_0$ y $\|f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)\| = \|f(\vec{x}_0) - f(\vec{x}_0)\| = 0 < \varepsilon$. Se sigue que f es continua en $\vec{x}_0$.

(3).- f es continua en $\vec{x}_0 \iff$ para toda $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $f(B(\vec{x}_0, \delta) \cap A) \subseteq B(f(\vec{x}_0), \varepsilon)$.

Ejemplos 4.1.7

(1).- Sea $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por: $\pi_i(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = x_i$. La función π_i es la *i-ésima proyección de* $\mathbb{R}^n$.

Sea $\varepsilon > 0$ y sea $\delta = \varepsilon$, entonces $|x_i - x_i^0| \leq \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta$. Por lo tanto

$$|\pi_i(\vec{x}) - \pi_i(\vec{x}_0)| = |x_i - x_i^0| \leq \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta = \varepsilon.$$

Se sigue que π_i es una función continua.

(2).- <u>Función suma</u>

Sea $\oplus : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \oplus(\vec{x}, \vec{y}) := \vec{x} + \vec{y}$. Sea $(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$. Sea $\varepsilon > 0$ y sea $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$. Entonces si $\|(\vec{x}, \vec{y}) - (\vec{x}_0, \vec{y}_0)\| < \delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$ se tiene

$$\begin{aligned} \| \oplus (\vec{x}, \vec{y}) - \oplus(\vec{x}, \vec{y})\| &= \|(\vec{x} + \vec{y}) - (\vec{x}_0 + \vec{y}_0)\| = \|\vec{x} - \vec{x}_0 + \vec{y} - \vec{y}_0\| \leq \\ &\leq \|\vec{x} - \vec{x}_0\| + \|\vec{y} - \vec{y}_0\| \leq 2\|(\vec{x}, \vec{y}) - (\vec{x}_0, \vec{y}_0)\| < \\ &< 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\oplus$ es una función continua.

(3).- <u>Multiplicación por escalar:</u>

Sea $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \varphi(\lambda, \vec{x}) = \lambda \cdot \vec{x}$.

Sea $\varepsilon > 0$ y sea $(\lambda_0, \vec{x}_0) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$. Primero notemos que para $\delta_1 = 1, |\lambda|-|\lambda_0| \leq \lambda - \lambda_0 \leq \|(\lambda, \vec{x}) - (\lambda_0, \vec{x}_0)\| < 1$, por lo que $|\lambda| < 1 + |\lambda_0|$. Se tiene:

$$\begin{aligned}\|\varphi(\lambda, \vec{x}) - \varphi(\lambda_0, \vec{x}_0)\| &= \|\lambda\vec{x} - \lambda_0\vec{x}_0\| = \|\lambda\vec{x} - \lambda\vec{x}_0 + \lambda\vec{x}_0 - \lambda_0\vec{x}_0\| \leq \\ &\leq |\lambda|\|\vec{x} - \vec{x}_0\| + \|\vec{x}_0\||\lambda - \lambda_0| \leq \\ &\leq (1 + |\lambda_0|)\|\vec{x} - \vec{x}_0\| + \|\vec{x}_0\||\lambda - \lambda_0|.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\|\varphi(\lambda, \vec{x}) - \varphi(\lambda_0, \vec{x}_0)\| \leq (1 + |\lambda_0| + \|\vec{x}_0\|)\|(\lambda, \vec{x}) - (\lambda_0, \vec{x}_0)\|.$$

Tomamos $\delta = \min\left\{\delta_1, \dfrac{\varepsilon}{1 + |\lambda_0| + \|\vec{x}_0\|}\right\}$, entonces si $\|(\lambda, \vec{x}) - (\lambda_0, \vec{x}_0)\| < \delta$ se tiene que $\|\varphi(\lambda, \vec{x}) - \varphi(\lambda_0, \vec{x}_0)\| < \varepsilon$. Se sigue que $\varphi(\lambda, \vec{x}) = \lambda\vec{x}$ es una función continua en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Teorema 4.1.8 *Sean $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $\vec{x}_0 \in A$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

i).- *f es continua en $\vec{x}_0$.*

ii).- *Para toda vecindad V de $f(\vec{x}_0)$, existe un vecindad $\mathcal{U}$ de $\vec{x}_0$ tal que $f(\mathcal{U} \cap A) \subseteq V$.*

iii).- *Si $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$ es tal que $\vec{x}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \vec{x}_0$, entonces $f(\vec{x}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(\vec{x}_0)$.*

<u>*Demostración*</u>.
<u>i) $\Rightarrow$ ii)</u> Sea V vecindad de $f(\vec{x}_0)$. Por lo tanto existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(f(\vec{x}_0), \varepsilon) \subseteq V$. Ahora, existe $\delta > 0$ tal que $f(B(\vec{x}_0, \delta) \cap A) \subseteq B(f(\vec{x}_0), \varepsilon) \subseteq V$. Tomando $\mathcal{U} = B(\vec{x}_0, \delta)$ se tiene lo deseado.
<u>ii) $\Rightarrow$ iii)</u> Sea $\vec{x}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \vec{x}_0, \{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$. Sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe $\mathcal{U}$ vecindad de $\vec{x}_0$ tal que $f(\mathcal{U} \cap A) \subseteq B(f(\vec{x}_0), \varepsilon)$. Ahora, existe $\delta > 0$ tal que $B(\vec{x}_0, \delta) \subseteq \mathcal{U}$ y por lo tanto, existe n_0 tal que para toda $n \geq n_0, \vec{x}_n \in B(\vec{x}_0, \delta) \cap A \subseteq \mathcal{U} \cap A$. Esto implica $f(\vec{x}_n) \in B(f(\vec{x}_0), \varepsilon)$, por lo que $\|f(\vec{x}_n) - f(\vec{x}_0)\| < \varepsilon$ para toda $n \geq n_0$. Se sigue que $f(\vec{x}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(\vec{x}_0)$.
<u>iii) $\Rightarrow$ i)</u> Supongamos que f no es continua en $\vec{x}_0$. Por lo tanto existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para toda $\delta > 0$ existe $\vec{x}_\delta \in A \cap B(\vec{x}_0, \delta)$ tal que $\|f(\vec{x}_\delta) - f(\vec{x}_0)\| \geq \varepsilon_0$.

Sea $\delta_n = \dfrac{1}{n}$. Entonces $\|\vec{x}_n - \vec{x}_0\| < \delta_n = \dfrac{1}{n}$ por lo que $\vec{x} \xrightarrow[n\to\infty]{} \vec{x}_0$ de donde se sigue que $f(\vec{x}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(\vec{x}_0)$ pero, por otro lado, $\|f(\vec{x}_n) - f(\vec{x}_0)\| \geq \varepsilon_0$ lo que contradice iii). Por lo tanto f es continua en $\vec{x}_0$. ❏

Ejemplos 4.1.9

(1).- Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{|x|^3+y^2} & , \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & , \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

Veamos que f es continua en $(0,0)$.

Se tiene: $|x^2y|=|x^{1/2}||x^{3/2}y|\leq\dfrac{|x^{3/2}|^2+y^2}{2}|x|^{1/2}=\dfrac{\sqrt{|x|}}{2}(|x|^3+y^2)$. Por lo tanto

$$\left|\frac{x^2y}{|x|^3+y^2}\right|\leq\frac{\sqrt{|x|}}{2}\cdot\left(\frac{|x|^3+y^2}{|x|^3+y^2}\right)=\frac{\sqrt{|x|}}{2}=\frac{\sqrt{\sqrt{x^2}}}{2}\leq\frac{\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}}}{2}=\frac{\sqrt{\|(x,y)\|}}{2}.$$

Sea $\varepsilon>0$ y sea $\delta=4\varepsilon^2$. Si $\|(x,y)-(0,0)\|<\delta=4\varepsilon^2$, entonces

$$|f(x,y)-f(0,0)|=\left|\frac{x^2y}{|x|^3+y^2}\right|\leq\frac{\sqrt{\|(x,y)\|}}{2}<\frac{(4\varepsilon^2)^{1/2}}{2}=\frac{2\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

(2).- Sea $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ para $(x,y)\neq(0,0)$.

Sea $x_n=y_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$. Entonces $f(x_n,y_n)=\dfrac{x_n^2-x_n^2}{2x_n^2}=0\xrightarrow[n\to\infty]{}0$. Ahora sea $x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0, y_n=0$ para toda n. Se tiene $f(x_n,y_n)=\dfrac{x_n^2-0}{x_n^2+0}=1\xrightarrow[n\to\infty]{}1$.

Por tanto no hay forma de definir $f(0,0)$ de tal forma que f sea continua en $(0,0)$.

Teorema 4.1.10 *Sea $f:A\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m, \vec{x}_0\in A'$. Entonces $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0}f(\vec{x})=\vec{\ell}\iff$ para toda sucesión $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^\infty\subseteq A$, con $\vec{x}_n\neq\vec{x}_0$ para toda $n\in\mathbb{N}$ y tal que $\vec{x}_n\xrightarrow[n\to\infty]{}\vec{x}_0$ se tiene que $f(\vec{x}_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}\vec{\ell}$.*

Demostración.
$\Rightarrow$) Sea $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^\infty\subseteq A$, $\vec{x}_n\neq\vec{x}_0,\vec{x}_n\xrightarrow[n\to\infty]{}\vec{x}_0$. Sea $\varepsilon>0$, entonces existe $\delta>0$ tal que $f((B(\vec{x}_0,\delta)\cap A)\setminus\{\vec{x}_0\})\subseteq B(\vec{\ell},\varepsilon)$. Ahora, existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que para toda $n\geq n_0$, $\|\vec{x}_n-\vec{x}_0\|<\delta$ y $\vec{x}_n\in A$, $\vec{x}_n\neq\vec{x}_0$ se tiene que $\vec{x}_n\in[B(\vec{x}_0,\,\delta)\cap A]\setminus\{\vec{x}_0\}$. Por lo tanto $f(\vec{x}_n)\in B(\vec{\ell},\varepsilon)$ de donde, para toda $n\geq n_0$, $\|f(\vec{x}_n)-\vec{\ell}\|<\varepsilon$. Por lo tanto $\lim\limits_{n\to\infty}f(\vec{x}_n)=\vec{\ell}$.
$\Leftarrow$) Si no se tuviese $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0}f(\vec{x})=\vec{\ell}$, entonces existe $\varepsilon_0>0$ tal que para toda $\delta>0$ existe $\vec{x}_\delta\in A$ tal que $0<\|\vec{x}_\delta-\vec{x}_0\|<\delta$ y $\|f(\vec{x}_\delta)-\vec{\ell}\|\geq\varepsilon_0$.

Sea $\delta_n=\dfrac{1}{n}$. Entonces existe $\vec{x}_n\in A$ tal que $0<\|\vec{x}_n-\vec{x}_0\|<\dfrac{1}{n}$. Por lo tanto $\vec{x}_n\neq\vec{x}_0$ para toda $n\in\mathbb{N}$ y $\vec{x}_n\xrightarrow[n\to\infty]{}\vec{x}_0$ y $\|f(\vec{x}_n)-\vec{\ell}\|\geq\varepsilon_0$.

Ahora puesto que $f(\vec{x}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \vec{\ell}$, existe n_0 tal que para toda $n \geq n_0$, $\varepsilon_0 \leq \|f(\vec{x}_n)-\vec{\ell}\| < \varepsilon_0$, lo cual implica que $\varepsilon_0 < \varepsilon_0$ lo cual es absurdo. Por lo tanto $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(x) = \vec{\ell}$. ❏

Aunque ya se enunció, ahora demostramos en forma más completa el siguiente

Teorema 4.1.11 *Sean* $f, g\colon A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\vec{x}_0 \in A'$, $\lambda \in \mathbb{R}$. *Sean* $\lim\limits_{\vec{x}\to x_0} f(\vec{x}) = \vec{\ell}$, $\lim\limits_{\vec{x}\to x_0} g(\vec{x}) = \vec{t}$. *Entonces:*

i).- $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} (f+g)(\vec{x}) = \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) + \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} g(\vec{x}) = \vec{\ell} + \vec{t}$.

ii).- $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} (\lambda f)(\vec{x}) = \lambda \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = \lambda\vec{\ell}$.

iii).- *Si* $m = 1$, $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} (f \cdot g)(\vec{x}) = \left[\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x})\right]\left[\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} g(\vec{x})\right] = \ell \cdot t$.

iv).- *Si* $m = 1$ *y* $t \neq 0$, $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \dfrac{f(\vec{x})}{g(\vec{x})} = \dfrac{\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x})}{\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} g(\vec{x})} = \dfrac{\ell}{t}$.

<u>*Demostración*</u>.

Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \vec{x}_n = \vec{x}_0$ y $\vec{x}_n \neq \vec{x}_0$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

i).- $(f+g)(\vec{x}_n) = f(\vec{x}_n) + g(\vec{x}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \vec{\ell} + \vec{t}$, por lo que $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} (f+g)(\vec{x}) = \vec{\ell} + \vec{t}$.

ii).- $(\lambda f)(\vec{x}_n) = \lambda f(\vec{x}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda\vec{\ell}$, por lo que $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} (\lambda f)(\vec{x}) = \lambda\vec{\ell}$.

iii).- Sea $m = 1$, $(f \cdot g)(\vec{x}_n) = f(\vec{x}_n) \cdot g(\vec{x}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \cdot t$. Por lo tanto $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} (f \cdot g)(\vec{x}) = \ell \cdot t$.

iv).- Sea $m = 1$, $t \neq 0$. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq n_0$ se tiene que $|g(\vec{x}_0) - g(\vec{x}_n)| \leq |g(\vec{x}_n) - g(\vec{x}_0)| < \dfrac{|g(\vec{x}_0)|}{2}$. Por tanto $|g(\vec{x}_n)| > \dfrac{|g(\vec{x}_0)|}{2} > 0$ para $n \geq n_0$. Se sigue que $\left(\dfrac{f}{g}\right)(\vec{x}_n) = \dfrac{f(\vec{x}_n)}{g(\vec{x}_n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{\ell}{t}$. Se tiene $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \dfrac{f}{g}(\vec{x}) = \dfrac{\ell}{t}$. ❏

Corolario 4.1.12 *Sean* $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \vec{x}_0 \in A$ *y* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Si* f *y* g *son continuas en* $\vec{x}_0$, *entonces:*

i).- $f + g$ *y* λf *son continuas en* $\vec{x}_0$.

ii).- *Si* $m = 1, f \cdot g$ *es continua en* $\vec{x}_0$.

iii).- *Si* $m = 1$ *y* $g(\vec{x}_0) \neq 0, \dfrac{f}{g}$ *es continua en* $\vec{x}_0$.

<u>*Demostración*</u>. Si $\vec{x}_0$ es punto aislado, el resultado es inmediato.

Sea $\vec{x}_0 \in A'$. Por tanto $\vec{x}_0 \in A \cap A'$. Se tiene $\lim\limits_{x \to \vec{x}_0} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0)$ y $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x}_0} g(\vec{x}) = g(\vec{x}_0)$.

i).- $(f+g)(\vec{x}) = f(\vec{x}) + g(\vec{x}) \underset{\vec{x} \to \vec{x}_0}{\longrightarrow} f(\vec{x}_0) + g(\vec{x}_0) = (f+g)(\vec{x}_0)$,

$(\lambda f)(\vec{x}) = \lambda f(\vec{x}) \underset{\vec{x} \to \vec{x}_0}{\longrightarrow} \lambda f(\vec{x}_0)$.

Por lo tanto $f+g$ y λf son continuas en $\vec{x}_0$.

ii).- Si $m = 1 : (f \cdot g)(\vec{x}) \underset{\vec{x} \to \vec{x}_0}{\longrightarrow} f(\vec{x}_0)g(\vec{x}_0)$. Por lo tanto $f \cdot g$ es continua en $\vec{x}_0$.

iii).- Sea $m = 1$, $g(\vec{x}_0) \neq 0$. Existe $\delta > 0$ tal que $\vec{x} \in A$ y $\|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta$ implica que $|g(\vec{x}_0) - |g(\vec{x})| \leq |g(\vec{x}_0) - g(\vec{x})| < \dfrac{|g(\vec{x}_0)|}{2}$. Se sigue que $|g(\vec{x})| > \dfrac{|g(\vec{x}_0)|}{2} > 0$ para toda $x \in B(\vec{x}_0, \delta) \cap A$. Entonces

$$\left(\frac{f}{g}\right)(\vec{x}) = \frac{f(\vec{x})}{g(\vec{x})} \underset{\vec{x} \to \vec{x}_0}{\longrightarrow} \frac{f(\vec{x}_0)}{g(\vec{x}_0)} = \left(\frac{f}{g}\right)(\vec{x}).$$

Por lo tanto $\dfrac{f}{g}$ es continua en $\vec{x}_0$. ❏

Teorema 4.1.13 *Sean* $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq \mathbb{R}^m$, $f : A \to \mathbb{R}^m$ *y* $g : B \to \mathbb{R}^k$ *tales que* $f(A) \subseteq B$. *Sea* $\vec{x}_0 \in A$ *tal que* f *es continua en* $\vec{x}_0$ *y* g *es continua en* $f(\vec{x}_0)$. *Entonces* $g \circ f : A \to \mathbb{R}^k$ *es continua en* $\vec{x}_0$.

<u>*Demostración*</u>. Sea $\vec{y}_0 = f(\vec{x}_0)$. Sea $\varepsilon > 0$. Entonces, por ser g continua en $\vec{y}_0$, existe $\eta > 0$ tal que $g(B(\vec{y}_0, \eta) \cap B) \subseteq B(g(\vec{y}_0), \varepsilon)$. Ahora, por ser f continua en $\vec{x}_0$, existe $\delta > 0$ tal que $f(B(\vec{x}_0, \delta) \cap A) \subseteq B(\vec{y}_0, \eta)$, por tanto se tiene:

$$\begin{aligned}
&(g \circ f)(B(\vec{x}_0, \delta) \cap A) = g(f(B(\vec{x}_0, \delta) \cap A)) \subseteq g(f(B(\vec{x}_0, \delta)) \cap f(A)) \subseteq \\
&\subseteq g(B(\vec{y}_0, \eta) \cap B) \subseteq B(g(\vec{y}_0), \varepsilon) = B(g(f(\vec{x}_0)), \varepsilon) = B((g \circ f)(\vec{x}_0), \varepsilon).
\end{aligned}$$

Por lo tanto $g \circ f$ es continua en $\vec{x}_0$. ❏

Observación 4.1.14 Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n, f : A \to \mathbb{R}^m$. Entonces para toda $1 \leq i \leq m$, se define $f_i = \pi_i \circ f : A \to \mathbb{R}$ y se tiene:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), f_2(x_1, \ldots x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)),$$

es decir $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ con $f_i = \pi_i \circ f, 1 \leq i \leq m$. Las funciones $f_1, f_2, \ldots, f_m$ reciben el nombre de *funciones componentes de* f.

Teorema 4.1.15 *Sean* $f : A \to \mathbb{R}^m, A \subseteq \mathbb{R}^n, f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ *con* $f_i = \pi \circ f, 1 \leq i \leq m$*. Entonces* f *es continua en* $\vec{x}_0 \in A \iff f_i$ *es continua en* $\vec{x}_0$ *para toda* $1 \leq i \leq m$*.*

<u>*Demostración*</u>.
$\Rightarrow$) Para cualquier $1 \leq i \leq m$, $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es continua. Por tanto $f_i = \pi_i \circ f$ es continua en $\vec{x}_0, 1 \leq i \leq m$.
$\Leftarrow$) Sea $\varepsilon > 0$. Entonces para cada $1 \leq i \leq m$, existe $\delta_i > 0$ tal que si $\|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta_i$ entonces $|f_i(\vec{x}) - f_i(\vec{x}_0)| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$.

Sea $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m\} > 0$ y sea $\|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta$. Entonces

$$\begin{aligned}\|f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)\| &= \|(f_1(\vec{x}) - f_1(\vec{x}_0), f_2(\vec{x}) - f_2(\vec{x}_0), \ldots, f_m(\vec{x}) - f_m(\vec{x}_0))\| = \\ &= \left\{(f_1(\vec{x}) - f_1(\vec{x}_0))^2 + (f_2(\vec{x}) - f_2(\vec{x}_0))^2 + \ldots + (f_m(\vec{x}) - f_m(\vec{x}_0))^2\right\}^{1/2} \\ &< \left\{\frac{\varepsilon^2}{n} + \frac{\varepsilon^2}{n} + \ldots + \frac{\varepsilon^2}{n}\right\}^{1/2} = \frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sqrt{n}} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Por lo tanto f es continua en $\vec{x}_0$. ❑

Más generalmente se tendrá:

Teorema 4.1.16 *Sean* $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to R^m, \vec{x}_0 \in A', f(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \ldots, f_m(\vec{x}))$*, con* $f_i : A \to \mathbb{R}, 1 \leq i \leq m$*. Se tiene que*

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} f(\vec{x}) = \vec{\ell} = (\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_m) \iff \lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} f_i(\vec{x}) = \ell_i, \quad 1 \leq i \leq m.$$

<u>*Demostración*</u>. Se tiene: $f(\vec{x}) \xrightarrow[\vec{x} \to \vec{x}_0]{} \vec{\ell} \iff$ para toda sucesión $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$ tal que $\vec{x}_n \neq \vec{x}_0$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y $\vec{x}_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \vec{x}_0$,

$$f(\vec{x}_n) = (f_1(\vec{x}_n), \ldots, f_m(\vec{x}_n)) \xrightarrow[n \to \infty]{} \vec{\ell} = (\ell_1, \ldots, \ell_m) \iff$$

para toda sucesión $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$ tal que $\vec{x}_n \neq \vec{x}_0, \vec{x}_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \vec{x}_0$ para toda $1 \leq i \leq m$ se tiene que

$$f_i(\vec{x}_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} \ell_i \iff f_i(\vec{x}) \xrightarrow[\vec{x} \to \vec{x}_0]{} \ell_i, \quad 1 \leq i \leq m.$$ ❑

Ya se dió la caracterización de la continuidad local de una función, es decir, continuidad en un punto, por medio de vecindades. Ahora damos la caracterización de la continuidad global de una función, es decir, continuidad en su dominio, por medio de la topología relativa.

Teorema 4.1.17 *Sean* $f : A \to \mathbb{R}^m, A \subseteq \mathbb{R}^n$*. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

i).- f *es continua en* A*.*

ii).- *Para todo conjunto abierto V de $\mathbb{R}^m, f^{-1}(V)$ es abierto en A, es decir, existe $\mathcal{U}$ conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$ tal que $f^{-1}(V) = \mathcal{U} \cap A$.*

iii).- *Para todo conjunto cerrado G de $\mathbb{R}^m, f^{-1}(G)$ es cerrado en A, es decir, existe un conjunto cerrado F de $\mathbb{R}^n$ tal que $f^{-1}(G) = F \cap A$.*

Demostración.

i)$\Rightarrow$ ii) Sea V un conjunto abierto de $\mathbb{R}^m$. Sea $\vec{x}_0 \in f^{-1}(V)$. Por tanto $f(\vec{x}_0) \in V$. Entonces existe un conjunto abierto $\mathcal{U}_{\vec{x}_0}$ de $\mathbb{R}^n$ tal que $f(\mathcal{U}_{\vec{x}_0} \cap A) \subseteq V$ y $\vec{x}_0 \in \mathcal{U}_{\vec{x}_0}$.

Sea $\mathcal{U} = \bigcup\limits_{\vec{x}_0 \in f^{-1}(V)} \mathcal{U}_{\vec{x}_0}$, $\mathcal{U}$ es abierto en $\mathbb{R}^n$. Afirmamos que $\mathcal{U} \cap A = f^{-1}(V)$.

En efecto, se tiene que $\mathcal{U}_{\vec{x}_0} \cap A \subseteq f^{-1}(V)$ para toda $\vec{x}_0 \in f^{-1}(V)$. Por lo tanto $\mathcal{U} \cap A = (\bigcup\limits_{\vec{x}_0 \in f^{-1}(V)} \mathcal{U}_{\vec{x}_0}) \cap A = \bigcup\limits_{\vec{x}_0 \in f^{-1}(V)} (\mathcal{U}_{\vec{x}_0} \cap A) \subseteq \bigcup\limits_{\vec{x}_0 \in f^{-1}(V)} f^{-1}(V) = f^{-1}(V)$.

Recíprocamente, sea $\vec{z}_0 \in f^{-1}(V)$. Entonces $\vec{z}_0 \in \mathcal{U}_{\vec{z}_0} \cap A \subseteq \mathcal{U} \cap A$. Por lo tanto $f^{-1}(V) \subseteq \mathcal{U} \cap A$. Se sigue que $f^{-1}(V) = \mathcal{U} \cap A$.

ii)$\Rightarrow$ iii) Sea G un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^m$. Por tanto $\mathcal{C}G$ es abierto y $f^{-1}(G) = \mathcal{U} \cap A$ con $\mathcal{U}$ un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. Ahora bien, se tiene:

$$\begin{aligned} f^{-1}(G) &= f^{-1}(\mathbb{R}^m \setminus \mathcal{C}G) = f^{-1}(\mathbb{R}^m) \setminus f^{-1}(\mathcal{C}G) = A \cap \mathcal{C}(f^{-1}(\mathcal{C}G)) = \\ &= A \cap (\mathcal{U} \cap A)^c = A \cap (\mathcal{U}^c \cup A^c) = (A \cap \mathcal{U}^c) \cup (\underbrace{A \cap A^c}_{\emptyset}) = A \cap \mathcal{U}^c \end{aligned}$$

y $\mathcal{U}^c$ es un conjunto cerrado. Por lo tanto $f^{-1}(G)$ es cerrado en A.

iii)$\Rightarrow$ ii) Sea $\mathcal{U}$ un conjunto abierto en $\mathbb{R}^m$, por lo que $\mathcal{C}\mathcal{U}$ es un conjunto cerrado. Por lo tanto $f^{-1}(\mathcal{C}\mathcal{U}) = F \cap A$ con F cerrado en $\mathbb{R}^n$. Se sigue que

$$f^{-1}(\mathcal{U}) = f^{-1}(\mathbb{R}^m \setminus \mathcal{C}\mathcal{U}) = A \setminus f^{-1}(\mathcal{C}\mathcal{U}) = A \cap \mathcal{C}(F \cap A) = A \cap F^c$$

con F^c un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$. Por lo tanto $A \cap F^c$ es abierto en A. Así pues $f^{-1}(\mathcal{U})$ es abierto en A.

ii)$\Rightarrow$ i) Sea $\vec{x}_0 \in A$ y sea $\varepsilon > 0, f^{-1}(B(f(\vec{x}_0), \varepsilon)) = \mathcal{U} \cap A$ con $\mathcal{U}$ un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y $\vec{x}_0 \in \mathcal{U} \cap A$. Por lo tanto existe $\delta > 0$ tal que $B(\vec{x}_0, \delta) \cap A \subseteq \mathcal{U} \cap A$. Se sigue que $f(B(\vec{x}_0, \delta) \cap A) \subseteq f[f^{-1}(B(f(\vec{x}_0), \varepsilon))] \subseteq B(f(\vec{x}_0), \varepsilon)$. Por lo tanto f es continua en $\vec{x}_0$. ❑

El siguiente teorema nos establece que la conexidad y la compacidad son propiedades topológicas, es decir, se preservan bajo funciones continuas.

Teorema 4.1.18 *Sea* $f : A \to \mathbb{R}^m, A \subseteq \mathbb{R}^n$ *y* f *continua en* A. *Se tiene que*

i).- *si* A *es conexo, entonces* $f(A)$ *es conexo,*

ii).- *si* A *es compacto, entonces* $f(A)$ *es compacto.*

Demostración.

i).- Supongamos que $f(A)$ es disconexo. Entonces existen $\mathcal{U}$, V conjuntos abiertos de $\mathbb{R}^m$ tales que

$$f(A) \subseteq \mathcal{U} \cup V, \quad f(A) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset \neq f(A) \cap V \quad \text{y} \quad \mathcal{U} \cap V \cap f(A) = \emptyset.$$

Sean $f^{-1}(\mathcal{U}) = \mathcal{U}_1 \cap A$ y $f^{-1}(V) = V_1 \cap A$ con $\mathcal{U}_1$, V_1 conjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$. Entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_1 \cap V_1 \cap A &= f^{-1}(\mathcal{U}) \cap f^{-1}(V) \cap f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(\mathcal{U} \cap V \cap f(A)) = \\ &= f^{-1}(\emptyset) = \emptyset. \end{aligned}$$

Además

$$A \subseteq f^{-1}(\mathcal{U} \cup V) = f^{-1}(\mathcal{U}) \cup f^{-1}(V) = (\mathcal{U}_1 \cup V_1) \cap A.$$

Por lo tanto $A \subseteq \mathcal{U}_1 \cup V_1$. Sea $\vec{y}_0 \in f(A) \cap \mathcal{U}$. Entonces existe $\vec{x}_0 \in A$ tal que $f(\vec{x}_0) = \vec{y}_0$. Por tanto $\vec{x}_0 \in f^{-1}(\mathcal{U}) = \mathcal{U}_1 \cap A$ y $\mathcal{U}_1 \cap A \neq \emptyset$. Análogamente tendremos $V_1 \cap A \neq \emptyset$. Por lo tanto A es disconexo lo cual es una contradicción. Se sigue que $f(A)$ es conexo.

ii).- Supongamos que $f(A)$ no es compacto. Entonces existe una cubierta abierta $\{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, $\mathcal{U}_\alpha$ conjunto abierto de $\mathbb{R}^m$ tal que $f(A) \subseteq \bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} \mathcal{U}_\alpha$ y tal que $f(A)$ no puede ser cubierto por un número finito de los conjuntos $\mathcal{U}_\alpha$.
Sea $f^{-1}(\mathcal{U}_\alpha) = V_\alpha \cap A$. Entonces $f(A) \subseteq \bigcup\limits_{\alpha\in Lambda} \mathcal{U}$. Por tanto

$$f^{-1}(f(A)) = A \subseteq \bigcup_{\alpha\in\Lambda} f^{-1}(\mathcal{U}_\alpha) = A \cap (\bigcup_{\alpha\in\Lambda} V_\alpha).$$

Se sigue que $A \subseteq \bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} V_\alpha$ por tanto existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ tales que $A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{k} V_{\alpha_i}$ (por ser $\{V_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ cubierta abierta de A y A compacto). Se sigue que $f(A) \subseteq f(\bigcup\limits_{i=1}^{k} V_{\alpha_i}) \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{k} f(V_{\alpha_i}) \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{k} \mathcal{U}_{\alpha_i}$, lo cual es absurdo.

Esto prueba que $f(A)$ es compacto. ❏

Corolario 4.1.19 (Los 3 teoremas fuertes para $\mathbb{R}$)
(1) Bolzano o Teorema del Valor Intermedio
Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y sea $f(a) \leq t_0 \leq f(b)$ (o $f(b) \leq t_0 \leq f(a)$) Entonces existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = t_0$.
(2) Weierstrass
Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces $f([a, b])$ está acotado.
(3) Weierstrass
Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua, existen $x_0, y_0 \in [a, b]$ tales que:

$$f(x_0) = \sup(f([a, b])) = \sup\{f(x) \mid x \in [a, b]\},$$
$$f(y_0) = \inf(f([a, b])) = \inf\{f(x) \mid x \in [a, b]\}.$$

<u>*Demostración*</u>. Se tiene que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua, puesto que $[a, b]$ es conexo y compacto, se tiene que $f([a, b])$ es conexo y compacto. Se sigue que $f([a, b]) = [c, d]$ es un intervalo cerrado.

(2) Puesto que $[c, d]$ está acotado, se sigue que $f([a, b])$ está acotado.

(3) Se tiene que $c = \inf[c, d]$, $d = \sup[c, d]$ y $f([a, b]) = [c, d]$ por lo que existen $y_0, x_0 \in [a, b]$ tales que $f(y_0) = c = \inf f([a, b])$, $f(x_0) = d = \sup f([a, b])$.

(1) Sea $c \leq f(a) \leq t_0 \leq f(b) \leq d$ (o $c \leq f(b) \leq t_0 \leq f(a) \leq d$). Por lo tanto $t_0 \in [c, d]$. Se sigue que existe $z_0 \in [a, b]$ tal que $f z_0) = t_0$. ❏

Corolario 4.1.20 (Teorema de los valores máximo y mínimo) *Sean $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto y $f : K \to \mathbb{R}^m$ una función continua. Entonces existen $\vec{x}_0, \vec{y}_0 \in K$ tales que $\|f(\vec{x}_0)\| = \sup\{\|f(\vec{x})\| \mid \vec{x} \in K\}$ y $\|f(\vec{y}_0)\| = \inf\{\|f(\vec{x})\| \mid \vec{x} \in K\}$.*

<u>*Demostración*</u>. Sea $h : K \to \mathbb{R}$ dada por: $h(\vec{x}) = \|f(\vec{x})\|$. Se tiene:

$$K \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m \xrightarrow{s=\|\ \|} \mathbb{R}, \qquad K \xrightarrow{h} \mathbb{R}$$

$h = s \circ f = \|f\|$. Por lo tanto h es una función continua pues tanto s como f lo son. Se sigue que $h(K) \subseteq \mathbb{R}$ es un conjunto compacto.

Por lo tanto $\inf h(K) \in \overline{h(K)} = h(K)$ y además $\inf h(K) > -\infty$; $\sup h(K) \in \overline{h(K)} = h(K)$ y además $\sup h(K) < \infty$. Por lo tanto existen $\vec{x}_0, \vec{y}_0 \in K$ tales que

$$h(\vec{x}_0) = \|f(\vec{x}_0)\| = \sup\{h(\vec{x}) \mid \vec{x} \in K\} = \sup\{\|f(\vec{x})\| \mid \vec{x} \in K\}$$

y

$$h(\vec{y}_0) = \|f(\vec{y}_0)\| = \inf\{h(\vec{x}) \mid \vec{x} \in K\} = \inf\{\|f(\vec{x})\| \mid \vec{x} \in K\}.$$ ❏

Corolario 4.1.21 (Teorema del valor intermedio) *Sea $f : K \to \mathbb{R}$ una función continua con $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto conexo. Sean $\vec{x}, \vec{y} \in K$ tales que $f(\vec{x}) \leq f(\vec{y})$ ($f(\vec{x}), f(\vec{y}) \in \mathbb{R}$). Sea $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(\vec{x}) \leq c \leq f(\vec{y})$. Entonces existe $\vec{x}_0 \in K$ tal que $f(\vec{x}_0) = c$.*

Demostración. Se tiene que $f(K) \subseteq \mathbb{R}$ es un conjunto conexo. Por tanto $f(K)$ es un intervalo y $f(\vec{x}), f(\vec{y}) \in f(K)$. Se sigue que $[f(\vec{x}), f(\vec{y})] \subseteq f(K)$ y $c \in f(K)$. Por lo tanto existe $\vec{x}_0 \in K$ tal que $f(\vec{x}_0) = c$. ❑

Corolario 4.1.22 (Equivalencia de las normas) *Sea $\| \ \|_1$ la norma uno de $\mathbb{R}^n$, es decir, $\|\vec{x}\|_1 = \|(x_1, \ldots, x_n)\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ y sea $\mathcal{N}$ una norma cualquiera de $\mathbb{R}^n$. Entonces existen constantes $\alpha, \beta > 0$ tales que: $\alpha\|\vec{x}\|_1 \leq \mathcal{N}(\vec{x}) \leq \beta\|\vec{x}\|_1$ para toda $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.*

Demostración. Ya se probó que existe $M > 0$ tal que $\mathcal{N}(\vec{x}) \leq M\|\vec{x}\|_1$ para toda $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Sean X igual a $\mathbb{R}^n$ pero considerando la norma $\| \ \|_1$ y Y también igual a $\mathbb{R}^n$ sólo que ahora considerando la norma $\mathcal{N}$.

Sea $\varphi : X \to Y$, $\varphi(\vec{x}) = \vec{x}$ (como conjuntos: $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$). Afirmamos que φ es continua.

En efecto, sea $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y sea $\varepsilon > 0$. Sea $\delta = \dfrac{\varepsilon}{M}$, entonces $\|\vec{x} - \vec{x}_0\|_1 < \delta$ implica que $\mathcal{N}(\vec{x} - \vec{x}_0) \leq M\|\vec{x} - \vec{x}_0\| < M\delta = \varepsilon$. Por lo tanto φ es continua.

Ahora sea $A = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\vec{x}\|_1 = 1\}$. Se tiene que A es un conjunto cerrado y acotado, por lo tanto A es compacto. Se sigue que $\varphi(A) = A \subseteq \mathbb{R}^n$ es compacto considerado $\mathbb{R}^n$ con la norma $\mathcal{N}$.

La función $\mathcal{N} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es continua pues $\mathcal{N}(\vec{x} + \vec{y}) \leq \mathcal{N}(\vec{x}) + \mathcal{N}(\vec{y})$ implica

$$\mathcal{N}(\vec{x}) = \mathcal{N}(\vec{x} - \vec{y} + \vec{y}) \leq \mathcal{N}(\vec{x} - \vec{y}) + \mathcal{N}(\vec{y})$$

y

$$\mathcal{N}(\vec{y}) = \mathcal{N}(\vec{y} - \vec{x} + \vec{x}) \leq \mathcal{N}(\vec{y} - \vec{x}) + \mathcal{N}(\vec{x}).$$

Por tanto

$$\mathcal{N}(\vec{x}) - \mathcal{N}(\vec{y}) \leq \mathcal{N}(\vec{x} - \vec{y}), \quad \mathcal{N}(\vec{y}) - \mathcal{N}(\vec{x}) \leq \mathcal{N}(\vec{x} - \vec{y})$$

así que

$$|\mathcal{N}(\vec{x}) - \mathcal{N}(\vec{y})| \leq \mathcal{N}(\vec{x} - \vec{y}).$$

Sea $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y sea $\varepsilon > 0$. Tomemos $\delta = \varepsilon$. Entonces $\mathcal{N}(\vec{x} - \vec{x}_0) < \delta$ implica

$$|\mathcal{N}(\vec{x}) - \mathcal{N}(\vec{x}_0)| \leq \mathcal{N}(\vec{x} - \vec{x}_0) < \delta = \varepsilon.$$

Por lo tanto $\mathcal{N}$ es continua y $\mathcal{N}(A)$ es compacto en $\mathbb{R}$. Además $\mathcal{N}(A) = \{\mathcal{N}(\vec{x}) \mid \|\vec{x}\|_1 = 1\}$. Por lo tanto $\mathcal{N}(\vec{x}) > 0$ para toda $\vec{x} \in A$. Se sigue que existe $\alpha > 0$ tal que $\mathcal{N}(\vec{x}) \geq \alpha$ para toda $\vec{x} \in A$. Ahora sea $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{x} \neq \vec{0}$ arbitrario. Por lo tanto $\dfrac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|_1} \in A$ implica

$$\mathcal{N}\left(\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|_1}\right) \geq \alpha \quad \text{y} \quad \mathcal{N}\left(\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|_1}\right) = \frac{1}{\|\vec{x}\|_1}\mathcal{N}(\vec{x}) \geq \alpha.$$

Por lo tanto $\mathcal{N}(\vec{x}) \geq \alpha\|\vec{x}\|_1$ para toda $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. ❑

Corolario 4.1.23 *Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq \mathbb{R}^m$ conjuntos no vacíos. Entonces $A \times B \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ es conexo $\iff$ A y B son conexos.*

Demostración.
$\Rightarrow$) Sea $f : A \times B \to \mathbb{R}^n, f(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a}$. Se tiene que f es continua y $f(A \times B) = A$ por lo que A es conexo. Ahora sea $g : A \times B \to \mathbb{R}^m$, $g(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{b}$. Se tiene que g es continua y $g(A \times B) = B$, por lo que B es conexo.
$\Leftarrow$) Si A o $B = \emptyset$ se tiene que $A \times B = \emptyset$. Por lo tanto $A \times B$ es conexo (sólo esta implicación es válida si consideramos conjuntos vacíos). Sean $A \neq \emptyset \neq B$. Sea $\vec{b} \in B$ fijo y sea $f : A \to \mathbb{R}^{n+m}$, $f(\vec{a}) = (\vec{a}, \vec{b})$. Se tiene que f es una función continua y $f(A) = A \times \{\vec{b}\}$. Por lo tanto $A \times \{\vec{b}\}$ es conexo. Sea $g : B \to \mathbb{R}^{n+m}$, $g(\vec{b}) = (\vec{a}, \vec{b})$, $\vec{a} \in A$ fijo, g es una función continua. Se sigue que $g(B) = \{\vec{a}\} \times B$ es conexo.

Sea $a_0 \in A$ fijo. Sea $A_{\vec{b}} = (A \times \{\vec{b}\}) \cup (\{\vec{a}_0\} \times B)$ el cual es un conjunto conexo pues $(A \times \{\vec{b}\}) \cap (\{\vec{a}_0\} \times B) = \{(\vec{a}_0, \vec{b})\} \neq \emptyset$ y ambos son conexos. Ahora: $\bigcap\limits_{\vec{b} \in B} A_{\vec{b}} \supseteq \{\vec{a}_0\} \times B \neq \emptyset$.
Por lo tanto $\bigcup\limits_{\vec{b} \in B} A_{\vec{b}} = A \times B$ es conexo. ❑

Ejemplos 4.1.24

(1).- Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por: $f(x, y) = \dfrac{\operatorname{sen}(e^{xy}) + x^2}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}}$. Entonces f es continua en $\mathbb{R}^2$ pues f es suma, producto y composición de funciones continuas.

(2).- Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, f(x, y, z) = \left(\dfrac{xy}{z}, x^2 - y^2, \operatorname{sen} x, e^{yz}\right)$. Entonces

$f_1(x, y, z) = \dfrac{xy}{z}$ es continua en $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \mid z = 0\}$ y

$$\left.\begin{array}{l} f_2(x, y, z) = x^2 - y^2, \\ f_3(x, y, z) = \operatorname{sen} x, \\ f_4(x, y, z) = e^{yz} \end{array}\right\} \text{son funciones continuas en } \mathbb{R}^3.$$

Por lo tanto f es continua en $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$.

(3).- Sea $A \subseteq \mathbb{R}^p$. Definimos $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ como $f(\vec{x}) = d(\vec{x}, A)$ para toda $\vec{x} \in \mathbb{R}^p$, es decir, $f(\vec{x}) = \inf\limits_{\vec{a} \in A} d(\vec{x}, \vec{a})$. Veremos que f es continua en $\mathbb{R}^p$.

En efecto, sean $\vec{x}, \vec{x}_0 \in \mathbb{R}^p$ arbitrarios Se tiene: $d(\vec{x}, \vec{a}) \leq d(\vec{x}, \vec{x}_0) + d(\vec{x}_0, \vec{a})$ para toda $\vec{a} \in A$.

Como $f(\vec{x}) = d(\vec{x}, A) \leq d(\vec{x}, \vec{a})$ para toda $\vec{a} \in A$, se tiene:

$$f(\vec{x}) = d(\vec{x}, A) \leq d(\vec{x}, \vec{x}_0) + d(\vec{x}_0, \vec{a})$$

para toda $\vec{a} \in A$.

Luego: $f(\vec{x}) = d(\vec{x}, A) \leq d(\vec{x}, \vec{x}_0) + d(\vec{x}_0, A) = d(\vec{x}, \vec{x}_0) + f(\vec{x}_0)$.

Por lo tanto

$$f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) \leq d(\vec{x}, \vec{x}_0) = \|\vec{x} - \vec{x}_0\|. \tag{1}$$

Se tiene también: $d(\vec{x}_0, \vec{a}) \leq d(\vec{x}_0, \vec{x}) + d(\vec{x}, \vec{a})$ para toda $\vec{a} \in A$.

De aquí se concluye que $d(\vec{x}_0, A) \leq d(\vec{x}_0, \vec{x}) + d(\vec{x}, A)$, es decir,

$$-\|\vec{x} - \vec{x}_0\| = -d(\vec{x}_0, \vec{x}) \leq f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0). \tag{2}$$

De (1) y (2) se consigue:

$$|f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)| \leq \|\vec{x} - \vec{x}_0\| \quad \text{para toda} \quad \vec{x}, \vec{x}_0 \in \mathbb{R}^p. \tag{3}$$

Ahora dado $\varepsilon > 0$, tomamos $\delta = \varepsilon$ y entonces

$$\|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta \overset{(3)}{\Longrightarrow} |f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0| < \varepsilon.$$

Por lo tanto f es continua en $\vec{x}_0$, luego f es continua en $\mathbb{R}^p$. De hecho f es uniformemente continua. Después definiremos este concepto.

Notemos las siguientes consecuencias:

i).- Sea $C = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^p \mid d(\vec{x}, \vec{a}) < 1 \text{ para algún } \vec{a} \in A\}$. Afirmamos que C es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^p$.

En efecto $C = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^p \mid d(\vec{x}, A) < 1\} = f^{-1}((-\infty, 1))$ y como $(-\infty, 1)$ es abierto en $\mathbb{R}$ y f es continua, entonces C es abierto en $\mathbb{R}^p$.

ii).- Sean $A_1, A_2 \subseteq \mathbb{R}^p$ y sean $\mathcal{U} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^p \mid d(\vec{x}, A_1) < d(\vec{x}, A_2)\}$, $V = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^p \mid d(\vec{x}, A_2) < d(\vec{x}, A_1)\}$. Entonces $\mathcal{U}$ y V son abiertos en $\mathbb{R}^p$.

En efecto, sean $f_1, f_2 : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ las funciones

$$f_1(\vec{x}) = d(\vec{x}, A), \quad f_2(\vec{x}) = d(\vec{x}, A_2)$$

para toda $\vec{x} \in \mathbb{R}^p$. Se tiene que f_1 y f_2 son funciones continuas en $\mathbb{R}^p$.

Se tiene: $\mathcal{U} = (f_2 - f_1)^{-1}((0,\infty))$, $V = (f_2 - f_1)^{-1}((-\infty, 0))$ y puesto que $(0,\infty)$, $(-\infty,0)$ son conjuntos abiertos y $f_2 - f_1$ es una función continua se sigue lo deseado.

iii).- Si $\vec{x}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \vec{x}_0$, entonces, por la continuidad de f, se sigue que $d(\vec{x}_n, A) \xrightarrow[n\to\infty]{} d(\vec{x}, A)$.

iv).- El conjunto $D = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^p \mid d(\vec{x}, A) \leq r\}$, donde $r \geq 0$ es cerrado.

v).- Si $A = \{\vec{a}\}$, entonces $d(\vec{x}, A) = d(\vec{x}, \vec{a})$, luego la función $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ dada por $f(\vec{x}) = d(\vec{x}, \vec{a}) = \|\vec{x} - \vec{a}\|$ es continua en $\mathbb{R}^p$. En particular la norma es una función continua.

(4).- Sea $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\pi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_i$. En el caso $n = 2$, sea $A = \left\{\left(x, \dfrac{1}{x}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\right\}$ el cual es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^2$. Ahora $\pi_1(A) = (0,\infty)$ el cual no es un conjunto cerrado. Por lo tanto la imagen de un conjunto cerrado no necesariamente es cerrado bajo la función continua π_1.

Ahora consideremos, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, f(\vec{x}) = \vec{b}$ fijo. Por ser constante f es continua, $\mathbb{R}^n$ es abierto, pero $f(\mathbb{R}^n) = \{\vec{b}\}$ no es abierto.

Este ejemplo prueba que las funciones continuas no necesariamente mandan cerrados en cerrados, ni abiertos en abiertos.

(5).- Sean $R > 0, 0 < r < R$ dos números fijos. Recordemos que el toro geométrico está dado por:

$$\mathbb{T} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | -r \leq z \leq r; x^2 + y^2 = (R-\lambda)^2, \text{ donde } \lambda^2 = r^2 - z^2\}.$$

Se puede demostrar que:

$$\mathbb{T} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} x = (R - r\cos 2\pi\varphi)\cos 2\pi\theta, \\ y = (R - r\cos 2\pi\varphi)\operatorname{sen} 2\pi\theta, \\ z = r \operatorname{sen} 2\pi\varphi \end{array} \text{ donde } \begin{array}{l} 0 \leq \theta \leq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq 1 \end{array} \right\}.$$

Consideremos ahora la aplicación $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f = (f_1, f_2, f_3)$, donde

$$\begin{array}{l} f_1(\theta,\varphi) = (R - r\cos 2\pi\varphi)\cos 2\pi\theta, \\ f_2(\theta,\varphi) = (R - r\cos 2\pi\varphi)\operatorname{sen} 2\pi\theta, \\ f_3(\theta,\varphi) = r\operatorname{sen} 2\pi\varphi \end{array} \quad \text{para toda } (\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^2.$$

Entonces f_1, f_2, f_3 son funciones continuas. Por lo tanto f es continua. Ahora si $C = [0,1] \times [0,1], \mathbb{T} = f(C)$ y puesto que C es compacto y conexo, $\mathbb{T}$ es compacto y conexo en $\mathbb{R}^3$.

(6).- Sea $\vec{a} \in \mathbb{R}^p$. Consideremos la función $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ dada por $f(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{a}$ para toda $\vec{x} \in \mathbb{R}^p$. Sea $K \subseteq \mathbb{R}^p$. Entonces $f(K) = \vec{a} + K$. Por lo tanto si K es un conjunot conexo entonces $K + \vec{a}$ es conexo y si K es compacto se sigue que $K + \vec{a}$ es compacto.

(7).- Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, f(\vec{x}) = \vec{y}_0 =$ fijo. Por tanto $\{\vec{y}_0\} \subseteq \mathbb{R}^m$ es compacto pero $f^{-1}(\{\vec{y}_0\}) = \mathbb{R}^n$ no es compacto.

Sea ahora $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \operatorname{sen} x$ para toda $x \in \mathbb{R}$. Se tiene que $f^{-1}([0,1]) = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} [2n\pi, (2n+1)\pi]$. Se tiene que $[0,1]$ es conexo y compacto, f continua pero $f^{-1}([0,1])$ no es ni conexo ni compacto. Por tanto la imagen inversa de conexos o compactos bajo funciones continuas no necesariamente son conexos o compactos.

Definición 4.1.25 Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y sea $f : A \to \mathbb{R}^m$. Se dice que f es *uniformemente continua en* A si para toda $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\|\vec{x} - \vec{y}\| < \delta$ implica $\|f(\vec{x}) - f(\vec{y})\| < \varepsilon$.

Observación 4.1.26 Si f es uniformemente continua en A, entonces f es continua en A.

Ejemplos 4.1.27

(1).- Sea $f(x) = x^2, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Veremos que f no es uniformemente continua en $\mathbb{R}$. Sea $\varepsilon_0 = 1$ y sea $\delta > 0$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq n_0$, $\frac{1}{n} < \delta$. Sean $x_n = n, y_n = n + \frac{1}{n}$, entonces $|x_n - y_n| = \frac{1}{n} < \delta$ para toda $n \geq n_0$ pero $|f(x_n) - f(y_n)| = |x_n^2 - y_n^2| = |n^2 - n^2 - 2 - \frac{1}{n^2}| = 2 + \frac{1}{n^2} > 2 > 1 = \varepsilon_0$. Por lo tanto f no es uniformemente continua en $\mathbb{R}$ aunque si es continua.

(2).- Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$. Sea $\varepsilon > 0$, elegimos $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, entonces si $|x - x'| < \delta$ se tiene que $|f(x) - f(x')| = |x^2 - x'^2| = |(x + x')||(x - x')| \leq (|x| + |x'|)|x - x'| \leq (1+1)|x - x'| = 2|x - x'| < 2\delta = \varepsilon$. Por lo tanto f es uniformemente continua en $[0,1]$ (pero no en $\mathbb{R}$).

Por lo tanto *La continuidad uniforme depende del conjunto del que se hable.*

(3).- Sean $f : A \to \mathbb{R}^m, A \subseteq \mathbb{R}^n$. La función f se llama de *Lipschitz* si existe $M \geq 0$ tal que $\|f(\vec{x}) - f(\vec{y})\| \leq M\|\vec{x} - \vec{y}\|$ para toda $\vec{x}, \vec{y} \in A$.

Si f es de Lipschitz entonces es uniformemente continua pues dada $\varepsilon > 0$, sea $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$, entonces $\|\vec{x} - \vec{y}\| < \delta$ implica $\|f(\vec{x}) - f(\vec{y})\| \leq M\|\vec{x} - \vec{y}\| < M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$.

Teorema 4.1.28 *Sea* $f : A \to \mathbb{R}^m, A \subseteq \mathbb{R}^n$, *una función continua. Si* A *es compacto entonces* f *es uniformemente continua sobre* A.

<u>*Demostración*</u>. Supongamos que f no es uniformemente continua en A. Entonces existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para toda $\delta > 0$, existen $\vec{x}_\delta, \vec{y}_\delta \in A$ tales que

$$\|\vec{x}_\delta - \vec{y}_\delta\| < \delta \quad \text{pero} \quad \|f(\vec{x}_\delta) - f(\vec{y}_\delta)\| \geq \varepsilon_0.$$

Sea $\delta_n = \dfrac{1}{n}$ y $\vec{x}_n, \vec{y}_n \in A$ tales que

$$\|\vec{x}_n - \vec{y}_n\| < \frac{1}{n} \quad \text{pero} \quad \|f(\vec{x}_n) - f(\vec{y}_n)\| \geq \varepsilon_0.$$

Se tiene que $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^\infty \subseteq A$ y A es un conjunto compacto por lo que existe $\{\vec{x}_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ subsucesión de $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^\infty$ que converge a un punto $\vec{x}_0 \in A$.

Ahora:

$$\|\vec{y}_{n_k} - \vec{x}_0\| \leq \|\vec{y}_{n_k} - \vec{x}_{n_k}\| + \|\vec{x}_{n_k} - \vec{x}_0\| < \frac{1}{n_k} + \|\vec{x}_{n_k} - \vec{x}_0\| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

Por lo tanto

$$\vec{y}_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \vec{x}_0 \quad \text{y} \quad \vec{x}_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \vec{x}_0.$$

Se obtiene que

$$\varepsilon_0 \leq \|f(\vec{x}_{n_k}) - f(\vec{y}_{n_k})\| \xrightarrow[k\to\infty]{} \|f(\vec{x}_0) - f(\vec{x}_0)\| = 0$$

lo cual es absurdo. Se sigue que f es uniformemente continua en A. ❏

Ejemplo 4.1.29 Sea $f : (0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{x}$. Se tiene que f no es uniformemente continua en $(0,1]$. En efecto, sea $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{3}$, entonces para toda $\delta > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq n_0$, $\dfrac{1}{n} < \delta$. Sean $x_n = \dfrac{1}{n}$, $y_n = \dfrac{2}{n}$, $|x_n - y_n| = \dfrac{1}{n} < \delta$ para toda $n \geq n_0$, pero $|f(x_n) - f(y_n)| = \left|n - \dfrac{n}{2}\right| = \dfrac{n}{2} \geq \dfrac{1}{2} > \varepsilon_0$.

Por otro lado, para toda $\eta > 0, [\eta, 1]$ es compacto, por lo que f es uniformemente continua en $[\eta, 1]$ para toda $\eta > 0$ pero no lo es en $(0,1]$.

Proposición 4.1.30 *Sea $f : A \to \mathbb{R}^m$ una función uniformemente continua en $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces f se puede extender continuamente a $\overline{A}$ en una única forma, es decir, existe $g : \overline{A} \to \mathbb{R}^m$ continua tal que $g|_A = f$, esto es, $g(\vec{x}) = f(\vec{x})$ para toda $\vec{x} \in A$.*

<u>*Demostración*</u>. Sea $\vec{x}_0 \in \overline{A}$. Entonces existe una sucesión $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$ tal que $\vec{x}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \vec{x}_0$. Sea $\varepsilon > 0$. Existe $\delta > 0$ tal que $\|\vec{x} - \vec{y}\| < \delta$ implica $\|f(\vec{x}) - f(\vec{y}\| < \varepsilon$.

Ahora $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy, por lo que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n, m \geq n_0$, se tiene que $\|\vec{x}_n - \vec{x}_m\| < \delta$ implica $\|f(\vec{x}_n) - f(\vec{x}_m)\| < \varepsilon$. Por lo tanto $\{f(\vec{x}_n)\}_{n=1}^{\infty}$, es de Cauchy y existe $\lim\limits_{n\to\infty} f(\vec{x}_n) = \vec{y}_0 \in \mathbb{R}^m$.

Definimos $g(\vec{x}_0) = \vec{y}_0$.

Sea $\{\vec{z}_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$ otra sucesión tal que $\vec{z}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \vec{x}_0$. Para ver que g es única hay que ver que $g(\vec{z}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \vec{y}_0$.

Sea $\varepsilon > 0$ y sea $\delta > 0$. Entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq n_0$, $\|\vec{x}_n - \vec{z}_n\| < \delta$ implica $\|f(\vec{x}_n) - f(\vec{z}_n)\| < \varepsilon$. Se sigue que $\lim\limits_{n\to\infty} f(\vec{z}_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(\vec{x}_n) = \vec{y}_0$. Por lo tanto g es única.

Por último, es claro que g es continua. ❑

4.2 Ejercicios

1) Sea $D \subseteq \mathbb{R}^p$ y sea $f : D \to \mathbb{R}^q$. Sean $f_1, \ldots, f_1$ las funciones componentes de f. Demostrar que $\vec{\ell} = \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}) \iff \ell_k = \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{a}} f_k(\vec{x}), k = 1, \ldots, q$, donde $\vec{a} \in D'$ y $\vec{\ell} = (\ell_1, \ldots, \ell_q) \in \mathbb{R}^q$.

2) Sea $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ la función, $\langle\ ,\rangle(\vec{x}, \vec{y}) := \langle \vec{x}, \vec{y}\rangle$. Probar que $\langle\ ,\ \rangle$ es una función continua en $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$.

3) Sea $D \subseteq \mathbb{R}^p$ y sea $f : D \to \mathbb{R}^q$. Se define $\|f\| : D \to \mathbb{R}$ por $\|f\|(\vec{x}) = \|f(\vec{x})\|$. Demostrar que si f es continua, entonces $\|f\|$ es continua. Dar un ejemplo de una función f tal que $\|f\|$ sea continua pero que f no sea continua.

4) Sea $T : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ una transformación lineal. Demostrar que T es uniformemente continua.

5) Sea $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ una función continua. Se define la *gráfica* de f como el conjunto $\Gamma(f) = \{(\vec{x}, f(\vec{x})) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \mid \vec{x} \in \mathbb{R}^p\}$. Probar que $\Gamma(f)$ es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$. El recíproco no es cierto, es decir existen funciones cuya gráfica es un conjunto cerrado pero que no son continuas. Dar un ejemplo.

6) Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que $g(x + y) = g(x)g(y)$ para toda $x, y \in \mathbb{R}$. Probar que si g es continua en 0, entonces g es continua en todo $\mathbb{R}$. Probar también que si existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $g(x_0) = 0$, entonces $g(x) = 0$ para toda $x \in \mathbb{R}$.

7) Un *polinomio en n variables* $x_1, \ldots, x_n$ es una función $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de la forma: $P(\vec{x}) = \sum_{k_1=0}^{p_1} \ldots \sum_{k_n=0}^{p_n} c_{k_1} \ldots c_{k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$, donde $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Demostrar que todo polinomio en n variables es una función continua en $\mathbb{R}^n$.

8) Una *función racional en n variables* es una función de la forma $f(\vec{x}) = \dfrac{P(\vec{x})}{Q(\vec{x})}$ donde P y Q son polinomios en n-variables. ¿Cual es el dominio natural de f? Probar que f es continua en cada punto de su dominio natural.

9) Considerar la función: $f(x,y) = \left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2)}}, \ln(x^2+y^2), \arctan \dfrac{x+y}{1-xy} \right)$. Encontrar el dominio natural D de la función f y demostrar que f es continua en D. Demostrar que $(0,0)$, $\left(2, \dfrac{1}{2}\right) \in D'$ y que no existen

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y), \qquad \lim_{(x,y)\to(2,\frac{1}{2})} f(x,y).$$

10) Considerar la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por: $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{|x|^3 + y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(0,0) = 0$ ¿Donde es continua $f(x,y)$?

11) Considerar la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por:

a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

Hallar los puntos de continuidad y discontinuidad de la función f.

12) Sea $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función $h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{si } x \notin [0,1] \end{cases}$. Probar que h no es continua en $\mathbb{R}$. Asegurarse exhibiendo un abierto $\mathcal{U}$ y un cerrado F en $\mathbb{R}$ tales que $h^{-1}(\mathcal{U})$ no es abierto y $h^{-1}(F)$ no es cerrado en $\mathbb{R}$.

13) Considerar la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$, para toda $x \in \mathbb{R}$. Demostrar que f es continua en $\mathbb{R}$ pero no manda abiertos en abiertos, ni cerrados en cerrados.

14) Sean $f, g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ funciones continuas en $\mathbb{R}^p$. Demostrar que el conjunto $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^p \mid f(\vec{x}) = g(\vec{x})\}$ es cerrado en $\mathbb{R}^p$. Deducir que si $f(\vec{x}) = g(\vec{x})$ en todo $\vec{x}$ de cierto conjunto A, entonces $f(\vec{x}) = g(\vec{x})$ para toda $\vec{x} \in \overline{A}$.

15) Sea $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ una función continua. Si K es compacto y conexo en $\mathbb{R}^p$, demostrar que $f(K)$ es un intervalo cerrado y acotado de $\mathbb{R}$. Deducir que no existe ninguna función continua f que aplique $[0,1]$ en $(0,1)$.

16) Sea B un compacto en $\mathbb{R}^p$ y sea $f : B \to \mathbb{R}^q$ una función continua inyectiva. Demostrar que $f^{-1} : f(B) \to B$ es una función continua.

17) Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^p$ que no sea cerrado. Probar que existe una función $f : A \to \mathbb{R}$ que es continua en A pero que no es acotada en A.

    Sugerencia: sea $\vec{x}_0 \in \overline{A} \setminus A$ y sea $f : A \to \mathbb{R}$, $f(\vec{x}) = \dfrac{1}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|}$ para toda $\vec{x} \in A$.

18) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función continua que únicamente toma valores racionales, es decir $f(\vec{x}) \in \mathbb{Q}$ para toda $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Demostrar que f es una función constante.

19) Considerar la función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \operatorname{sen} x$ para toda $x \in \mathbb{R}$. Encontrar un compacto K y un conexo C en $\mathbb{R}$ tales que $f^{-1}(K)$ no sea compacto y $f^{-1}(C)$ no sea conexo en $\mathbb{R}$ (K y C diferentes a los dados en el texto).

20)
    a) Sea $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ la función $f(\vec{x}) := \|\vec{x}\|$. Demostrar que f es uniformemente continua en $\mathbb{R}^p$.
    b) Sea $\odot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^P$ la función $\odot(\lambda, \vec{x}) = \lambda\vec{x}$ para toda $(\lambda, \vec{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$. Probar que $\odot$ es continua pero no uniformemente continua en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$.

21) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable, es decir, $f'(x)$ existe y es continua en $[a,b]$. Demostrar que f es uniformemente continua en $[a,b]$.

22)
    a) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ para toda $x \in \mathbb{R}$. Probar que f es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función $f(x) = x \operatorname{sen} x$ para toda $x \in \mathbb{R}$. Mostrar que f no es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

c) Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}, x \geq 0$. Demostrar que f es uniformemente continua en $[0, \infty)$.

d) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ para toda $x \in \mathbb{R}$. Probar que f es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

Sugerencia: f es continua, luego f es uniformemente continua en $[0, 2\pi]$. Usar la periodicidad de f.

23) Sea $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}, x > 0$ ¿Es f continua? ¿acotada? ¿uniformemente continua? en $(0, \infty)$.

24) Probar que la función $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$ es uniformemente continua en $[0, \infty)$ pero que no es de Lipschitz.

25) Sea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ y consideremos la función $f : [0, 1) \to A$ dada por $f(t) = (\cos 2\pi t, \operatorname{sen} 2\pi t)$ para toda $t \in [0, 1)$. Probar que f es una biyección continua. ¿Porque la función inversa no es continua?

26) Sea D un subconjunto de $\mathbb{R}^p$. Consideremos $f : D \to \mathbb{R}^q$ y sus funciones componentes $f = (f_1, \ldots, f_q), f_1, \ldots, f_q : D \to \mathbb{R}$. Demostrar que f es uniformemente continua en $D \iff f_1, \ldots, f_q$ son uniformemente continuas en D.

27) Sea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ y } 0 < y < x^2\}$.

a) Demostrar que en toda recta que pase por $(0, 0)$ hay un intervalo que contiene en su interior a $(0, 0)$ y que está totlamente contenido en $\mathbb{R}^2 \setminus A$.

b) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función, $f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad (x, y) \notin A \\ 1 & \text{si} \quad (x, y) \in A \end{cases}$. Dado $\vec{h} \in \mathbb{R}^2$ se define $g_{\vec{h}}(t) = f(t\vec{h})$ para toda $t \in \mathbb{R}$. Probar que $g_{\vec{h}}$ es continua en 0, pero que f no es continua en $(0, 0)$.

28) Sean $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, g : B \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ uniformemente continuas y $f(A) \subseteq B$. Probar que $g \circ f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ es uniformemente continua en A.

29) Sea $f : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^s$ una función tal que $\displaystyle\lim_{(\vec{x}, \vec{y}) \to (\vec{a}, \vec{b})} f(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{L}$. Supongamos que existen los límites: $\displaystyle\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} f(\vec{x}, \vec{y})$ y $\displaystyle\lim_{\vec{y} \to \vec{b}} f(\vec{x}, \vec{y})$. Demostrar que:

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} \left[\lim_{\vec{b} \to \vec{b}} f(\vec{x}, \vec{y}) \right] = \lim_{\vec{y} \to \vec{b}} \left[\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} f(\vec{x}, \vec{y}) \right] = \vec{L}.$$

30) Sea $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ cuando $x^2y^2+(x-y)^2 \neq 0$ (es decir cuando $(x,y)\neq(0,0)$). Mostrar que $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right) = \lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y))$ pero que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ no existe.

31) Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la función $f(x,y) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\dfrac{1}{y} & \text{si} \quad y\neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad y = 0 \end{cases}$. Probar que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ pero que: $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right) \neq \lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y))$.

32) Sea $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$ si $x\neq -y$. Probar que

$$\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x,y)) \neq \lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x,y)).$$

33) Sea $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ si $(x,y)\neq(0,0)$. Demostrar que $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{x^2}{x^2+y^2}\right) = 1$; que $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x^2+y^2}\right) = 0$ y que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ no existe.

34) Sea $f:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}$ una función. Definir que será $\lim\limits_{\|\vec{x}\|\to+\infty} f(\vec{x})$. ¿Existen los límites: $\lim\limits_{\|(x,y)\|\to+\infty}\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$, $\lim\limits_{\|(x,y,z)\|\to+\infty}\dfrac{xy-z^2}{x^2+y^2+z^2}$?

Capítulo 5

Derivadas

5.1 Resultados fundamentales

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivable en $x_0 \in (a, b)$. Sea $L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Se tiene que:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{L(x) - f(x)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \left\{ \frac{f(x_0) - f(x)}{x - x_0} + f'(x_0) \right\} = -f'(x_0) + f'(x_0) = 0.$$

Es decir la recta $L(x)$ aproxima a $f(x)$ en una vecindad de x_0. De hecho, si f es n-veces derivable en x_0 y $P_{n,x_0,f}(x)$ es el polinomio de Taylor de orden n de f en x_0,

$$P_{n,x_0,f}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

entonces $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - P_{n,x_0,f}(x)}{(x - x_0)^n} = 0$.

Para generalizar lo anterior, sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y sea $(x_0, y_0) \in \mathring{A}$. Queremos un plano que aproxime a $f(x, y)$ en una vecindad de (x_0, y_0) en el mismo sentido que en $\mathbb{R}$, es decir, se quiere un plano $L(x, y) = Ax+By+c$ tal que $L(x_0, y_0) = Ax_0+By_0+c = f(x_0, y_0)$. Por lo tanto $c = f(x_0, y_0) - Ax_0 - By_0$ y además:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{|f(x, y) - L(x, y)|}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|} = 0. \qquad (*)$$

Ahora:

$$\begin{aligned} f(x, y) - L(x, y) &= f(x, y) - (Ax + By + f(x_0, y_0) - Ax_0 - By_0) = \\ &= f(x, y) - f(x_0, y_0) - [A(x - x_0) + B(y - y_0)]. \end{aligned}$$

Sea $\vec{h} = (x,y) - (x_0,y_0) = (x-x_0, y-y_0)$ y sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la transformación lineal: $T(x,y) = Ax + By$. Entonces el límite $(*)$ se transforma en:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{|f(x,y) - f(x_0,y_0) - T(x-x_0, y-y_0)|}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|} =$$
$$= \lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{|f((x_0,y_0)+\vec{h}) - f(x_0,y_0) - T(\vec{h})|}{\|\vec{h}\|} = 0.$$

Por último, en el caso de una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de una variable real, f se llama derivable en $x_0 \in (a,b)$ si existe el límite:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0).$$

Sea $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $T(x) = f'(x_0)\cdot x$. Entonces la función T es lineal y se tiene:

$$\lim_{h\to 0} \frac{|f(x_0+h) - f(x_0) - T(h)|}{|h|} = 0,$$

donde $h = x - x_0$.

Con todo esto, podemos establecer la definición de derivada.

Definición 5.1.1 Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y sea $\vec{x}_0 \in \mathring{A}$. f se llama *diferenciable en* $\vec{x}_0$ si existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que:

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{\|f(\vec{x}_0+\vec{h}) - f(\vec{x}_0) - Df(\vec{x}_0)(\vec{h})\|}{\|\vec{h}\|} = \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \frac{\|f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) - Df(\vec{x}_0)(\vec{x}-\vec{x}_0)\|}{\|\vec{h}\|} = 0.$$

La transformación lineal T se llama la *derivada de* f *en* $\vec{x}_0$ y se denota $T = f'(\vec{x}_0) = Df(\vec{x}_0)$.

Observación 5.1.2 En el caso de $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, el plano que aproxima a $f(x,y)$ en una vecindad de (x_0,y_0), es decir, el plano tangente a $f(x,y)$ en el punto (x_0,y_0), es: $P(x,y) = f(x_0,y_0) + Df(x_0,y_0)((x,y)-(x_0,y_0))$. Equivalentemente si $\vec{x}_0 = (x_0,y_0)$ y $\vec{h} = (x-x_0, y-y_0)$,

$$P(\vec{x}_0+\vec{h}) = f(\vec{x}_0) + Df(\vec{x}_0)(\vec{h}).$$

Definición 5.1.3 Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y sea $\vec{x}_0 \in \mathring{A}$. Si f es diferenciable en $\vec{x}_0$ entonces a $Df(\vec{x}_0)$ se le llama la *diferencial* ó *derivada de* f *en* $\vec{x}_0$ y a $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $L(\vec{h}) = f(\vec{x}_0) + Df(\vec{x}_0)(\vec{h})$ se le llama el *plano tangente a* f *en el punto* $\vec{x}_0$.

Ejemplos 5.1.4

(1).- Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f(\vec{x}) = \vec{\ell}$ =cte. Se tiene $Df(\vec{x}_0)(\vec{h}) = 0$ para toda $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$.

En efecto,

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{\|f(\vec{x}_0+\vec{h}) - f(\vec{x}_0) - Df(\vec{x}_0)(\vec{h})\|}{\|\vec{h}\|} = \lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{\|\vec{\ell} - \vec{\ell} - \vec{0}\|}{\|\vec{h}\|} = 0.$$

(2).- Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal. Sea $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$.

$$\frac{\|T(\vec{x}_0+\vec{h}) - T(\vec{x}_0) - DT(\vec{x}_0)(\vec{h})\|}{\|\vec{h}\|} = \frac{\|T(\vec{h}) - DT(\vec{x}_0)(\vec{h})\|}{\|\vec{h}\|}.$$

Se propne $DT(\vec{x}_0) = T$. En efecto,

$$\begin{aligned}
&\lim_{\vec{h}\to\vec{o}} \frac{\|T(\vec{x}_0+\vec{h}) - T(\vec{x}_0) - DT(\vec{x}_0)(\vec{h})\|}{\|\vec{h}\|} = \\
&= \lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{\|T(\vec{x}_0) + T(\vec{h}) - T(\vec{x}_0) - T(\vec{h})\|}{\|\vec{h}\|} = \lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{\|\vec{0}\|}{\|\vec{h}\|} = 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto T es diferenciable y $DT(\vec{x}_0) = T$ para toda $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$.

(3).- Sea $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\pi_i(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = x_i$. Entonces π_i es una transformación lineal. Por lo tanto π_i es diferenciable y $D\pi_i(\vec{x}_0) = \pi_i$ para toda $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Por tanto

$$D\pi_i(\vec{x}_0)(\vec{h}) = \pi_i(\vec{h}) = h_i \quad \text{para toda} \quad \vec{h} \in \mathbb{R}^n.$$

(4).- Sea $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ una función bilineal, es decir

$$B(\alpha\vec{x}_1 + \beta\vec{x}_2, \vec{y}) = \alpha B(\vec{x}_1, \vec{y}) + \beta B(\vec{x}_2, \vec{y})$$

y

$$B(\vec{x}, \gamma\vec{y}_1 + \omega\vec{y}_2) = \gamma B(\vec{x}, \vec{y}_1) + \omega B(\vec{x}, \vec{y}_2).$$

Sean $(\vec{x}_0, \vec{y}_0), (\vec{h}, \vec{k}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Entonces

$$\begin{aligned}
&\frac{\|B((\vec{x}_0, \vec{y}_0) + (\vec{h}, \vec{k})) - B(\vec{x}_0, \vec{y}_0) - DB(\vec{x}_0, \vec{y}_0)(\vec{h}, \vec{k})\|}{\|(\vec{h}, \vec{k})\|} = \\
&= \frac{\|B(\vec{x}_0 + \vec{h}, \vec{y}_0 + \vec{k}) - B(\vec{x}_0, \vec{y}_0) - DB(\vec{x}_0, \vec{y}_0)(\vec{h}, \vec{k})\|}{\|(\vec{h}, \vec{k})\|} = \\
&= \frac{\|B(\vec{x}_0, \vec{k}) + B(\vec{h}, \vec{y}_0) + B(\vec{h}, \vec{k}) - DB(\vec{x}_0, \vec{y}_0)(\vec{h}, \vec{k})\|}{\|(\vec{h}, \vec{k})\|}.
\end{aligned}$$

Sea $\vec{h} = (h_1, h_2, \dots, h_n)$, $\vec{k} = (k_1, k_2, \dots, k_m)$ y sea $B(\vec{e}_i, \vec{E}_j) = a_{ij} \in \mathbb{R}^p$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^n$, $\{\vec{E}_j\}_{j=1}^m$ bases de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$. Por tanto $B(\vec{h}, \vec{k}) = \sum\limits_{i=1}^n \sum\limits_{j=1}^m a_{ij} h_i k_j$. Sea $M = \max\{\|a_{ij}\| \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$. Entonces

$$\|B(\vec{h}, \vec{k})\| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \|a_{ij}\| |h_i| |k_j| \leq M \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \|\vec{h}\| \|\vec{k}\| = nmM \|\vec{h}\| \|\vec{k}\|.$$

Sea $K = nmM$. Se tiene que $|B(\vec{h}, \vec{k})| \leq K \|\vec{h}\| \|\vec{k}\|$. Por lo tanto tenemos

$$0 \leq \lim_{(\vec{h},\vec{k}) \to (\vec{0},\vec{0})} \frac{\|B(\vec{h}, \vec{k})\|}{\|(\vec{h}, \vec{k})\|} \leq K \lim_{(\vec{h},\vec{k}) \to (\vec{0},\vec{0})} \frac{\|\vec{h}\| \|\vec{k}\|}{\sqrt{\|\vec{h}\|^2 + \|\vec{k}\|^2}} \leq$$

$$\leq K \lim_{(\vec{h},\vec{h}) \to (\vec{0},\vec{0})} \frac{\left(\sqrt{\|\vec{h}\|^2 + \|\vec{k}\|^2}\right)^2}{\sqrt{\|\vec{h}\|^2 + \|\vec{k}\|^2}} = K \lim_{(\vec{h},\vec{k}) \to (\vec{0},\vec{0})} \sqrt{\|\vec{h}\|^2 + \|\vec{k}\|^2} = 0.$$

Se sigue que

$$\lim_{(\vec{h},\vec{k}) \to (\vec{0},\vec{0})} \frac{\|B(\vec{h}, \vec{k}\|}{\|(\vec{h}, \vec{k})\|} = 0.$$

Se propone: $DB(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ dada por

$$DB(\vec{x}_0, \vec{y}_0)(\vec{h}, \vec{k}) = B(\vec{x}_0, \vec{k}) + B(\vec{h}, \vec{y}_0),$$

la cual es lineal. Entonces:

$$\lim_{(\vec{h},\vec{k}) \to (\vec{0},\vec{0})} \frac{\|B(\vec{x}_0 + \vec{h}, \vec{y}_0 + \vec{k}) - B(\vec{x}_0, \vec{y}_0) - B(\vec{x}_0, \vec{k}) - B(\vec{h}, \vec{y}_0)\|}{\|(\vec{h}, \vec{k})\|} =$$

$$= \lim_{(\vec{h},\vec{k}) \to (\vec{0},\vec{0})} \frac{\|B(\vec{h}, \vec{k})\|}{\|(\vec{h}, \vec{k})\|} = 0.$$

Por lo tanto B es diferenciable en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ y

$$DB(\vec{x}_0, \vec{y}_0)(\vec{h}, \vec{k}) = B(\vec{x}_0, \vec{k}) + B(\vec{h}, \vec{y}_0).$$

(5).- Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en $x_0 \in (a, b)$. Entonces:

$$Df(x_0)(h) = f'(x_0) \cdot h.$$

Teorema 5.1.5 *Sea $f\colon A\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, $\vec{x}_0\in\mathring{A}$. Si f es diferenciable en $\vec{x}_0$ entonces $Df(\vec{x}_0)$ es única.*

<u>*Demostración*</u>. Sean $L_1, L_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ transformaciones lineales tales que

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{\|f(\vec{x}_0+\vec{h})-f(\vec{x}_0)-L_i(\vec{h})\|}{\|\vec{h}\|}=0, \quad i=1,2.$$

Sea $\vec{e}\in\mathbb{R}^n$, $\|\vec{e}\|=1$. Sea $\vec{h}=\lambda\vec{e}$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
0 \;&\leq\; \|L_1(\vec{e})-L_2(\vec{e})\| = \frac{\|L_1(\lambda\vec{e})-L_2(\lambda\vec{e})\|}{|\lambda|} \underset{\vec{h}=\lambda\vec{e}}{\overset{}{\underset{\uparrow}{=}}} \\
&= \frac{\|f(\vec{x}_0+\vec{h})-f(\vec{x}_0)-L_2(\vec{h})-[f(\vec{x}_0+\vec{h})-f(\vec{x}_0)-L_1(\vec{h})]\|}{\|\vec{h}\|} \leq \\
&\leq \frac{\|f(\vec{x}_0+h)-f(\vec{x}_0)-L_2(\vec{h})\|}{\|\vec{h}\|} + \frac{\|f(\vec{x}_0+h)-f(\vec{x}_0)-L_1(\vec{h})\|}{\|\vec{h}\|} \xrightarrow[\vec{h}\to\vec{0}]{} 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $L_1(\vec{e})=L_2(\vec{e})$ para toda $\vec{e}\in\mathbb{R}^n$ tal que $\|\vec{e}\|=1$. Se sigue que L_1 y L_2 coinciden en una base de $\mathbb{R}^n$ por lo que $L_1=L_2$. ❑

Observación 5.1.6 Si $\vec{x}_0\notin\mathring{A}$ puede suceder que $Df(\vec{x}_0)$ no sea única. Esta es la razón del porqué se pide que $\vec{x}_0\in\mathring{A}$ para definir la noción de derivada.

Ejemplo 5.1.7 Sea $A=[0,1]\times\{0\}$ y sea $f:A\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dada por : $f(x,0)=x$.

Sea $Df(0,0)(x,y)=x+by$ con $b\in\mathbb{R}$ arbitrario.

Para que $(0,0)+(x,y)=(x,y)\in A$ es necesario que $y=0$ Por lo tanto si $\vec{h}=(h_1,h_2)\in A$, necesariamente $h_2=0$. Ahora bien:

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}}\frac{|f(\vec{0}+\vec{h})-f(\vec{0})-Df(\vec{0})(\vec{h})|}{\|\vec{h}\|}=\lim_{\vec{h}\to 0}\frac{|h_1-h_1|}{\sqrt{h_1^2+0^2}}=0.$$

Esto muestra que hay una infinidad de $Df(\vec{0})$.

Teorema 5.1.8 *Sean $A\subseteq\mathbb{R}^n$, $f:A\to\mathbb{R}^m$, $\vec{x}_0\in\mathring{A}$. Entonces f es diferenciable en $\vec{x}_0 \iff$ existen $T_1,T_2,\ldots,T_n:A\to\mathbb{R}^m$ funciones continuas en $\vec{x}_0$ tales que*

$$f(\vec{x})=f(\vec{x}_0)+\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_i^0)T_i(\vec{x})$$

para toda $\vec{x}=(x_1,\ldots,x_n)\in A$ y $\vec{x}_0=(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0)$.

<u>*Demostración*</u>.
<u>$\Rightarrow$)</u> Sea $Df(\vec{x}_0) = T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ la cual es lineal. Definimos $E : A \to \mathbb{R}^m$ por:

$$E(\vec{x}) = \begin{cases} \dfrac{f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) - T(\vec{x} - \vec{x}_0)}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|} & \text{si} \quad \vec{x} \neq \vec{x}_0 \\ \vec{0} & \text{si} \quad \vec{x} = \vec{x}_0 \end{cases} .$$

Se tiene que $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x}_0} E(\vec{x}) = \vec{0} = E(\vec{x}_0)$. Ahora bien,

$$\|\vec{x} - \vec{x}_0\| E(\vec{x}) = f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) - T(\vec{x} - \vec{x}_0),$$

por lo que

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + T(\vec{x} - \vec{x}_0) + \|\vec{x} - \vec{x}_0\| E(\vec{x}).$$

Sea $\varphi : A \to \mathbb{R}^m$ dada por:

$$\varphi(\vec{x}) = \begin{cases} \dfrac{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|_1} & \text{si} \quad \vec{x} \neq \vec{x}_0 \\ 1 & \text{si} \quad \vec{x} = \vec{x}_0 \end{cases} .$$

Se tiene $|\varphi(\vec{x})| \leq 1$.

Sea $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^n$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Ahora

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) &= f(\vec{x}_0) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_i^0) T(\vec{e}_i) + E(\vec{x}) \varphi(\vec{x}) \|\vec{x} - \vec{x}_0\|_1 = \\ &= f(\vec{x}_0) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_i^0) T(\vec{e}_i) + \sum_{i=1}^n (|x_i - x_i^0| E(\vec{x}) \varphi(\vec{x})). \end{aligned}$$

Sean $\alpha_i : A \to \mathbb{R}$, $i \leq i \leq n$, dadas por

$$\alpha_i(\vec{x}) = \begin{cases} \dfrac{|x_i - x_i^0|}{x_i - x_i^0} & \text{si} \quad x_i \neq x_i^0 \\ 0 & \text{si} \quad x_i = x_i^0 \end{cases} .$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) &= f(\vec{x}_0) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_i^0) T(\vec{e}_i) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_i^0) \alpha_i(\vec{x}) E(\vec{x}) \varphi(\vec{x}) = \\ &= f(\vec{x}_0) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_i^0) T_i(\vec{x}), \end{aligned}$$

donde $T_i\colon A \to \mathbb{R}^m$, $1 \leq i \leq m$ están dadas por:

$$T_i(\vec{x}) = T(\vec{e}_i) + \alpha_i(\vec{x})E(\vec{x})\varphi(\vec{x}),$$
$$T_i(\vec{x}_0) = T(\vec{e}_i) + \alpha_i(\vec{x}_0)E(\vec{x}_0)\varphi(\vec{x}_0) = T(\vec{e}_i) + (0)\cdot(\vec{0})\cdot 1 = T(\vec{e}_i).$$

Ahora falta probar que cada $T_i, 1 \leq i \leq n$, es continua en $\vec{x}_0$.

Se tiene que $\|T_i(\vec{x}) - T_i(\vec{x}_0)\| = \|\alpha_i(\vec{x})E(\vec{x})\varphi(\vec{x})\| \leq \|E(\vec{x})\| \xrightarrow[x\to x_0]{} \|E(\vec{x}_0)\| = 0$. Por lo tanto $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} T_i(\vec{x}) = T_i(\vec{x}_0)$. Se sigue que T_i es continua en $\vec{x}_0$, $1 \leq i \leq n$.

<u>$\Leftarrow)$</u> Ahora sea $f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - x_i^0)T_i(\vec{x})$. Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ la transformación lineal dada por $T(\vec{h}) = \sum\limits_{i=1}^{n} h_i T_i(\vec{x}_0)$.

Se tiene:

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{\|f(\vec{x}_0+\vec{h}) - f(\vec{x}_0) - T(\vec{h})\|}{\|\vec{h}\|} = \lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{\left\| \sum\limits_{i=1}^{n} h_i(T_i(\vec{x}_0+\vec{h}) - T_i(\vec{x}_0))\right\|}{\|\vec{h}\|} \leq$$
$$\leq \sum_{i=1}^{n} \lim_{h\to\vec{0}} \frac{|h_i|}{\|\vec{h}\|}\cdot\|T_i(\vec{x}_0+\vec{h}) - T_i(\vec{x}_0)\| \leq \sum_{i=1}^{n} \lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \|T_i(\vec{x}_0+\vec{h}) - T_i(\vec{x}_0)\| =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} 0 = 0.$$

Se sigue que

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{\|f(\vec{x}_0+\vec{h}) - f(\vec{x}_0) - T_i(\vec{h})\|}{\|\vec{h}\|} = 0.$$

Por lo tanto f es diferenciable en $\vec{x}_0$. ❑

El resultado anterior nos será de mucha utilidad, tanto en el aspecto teórico como en el práctico, por lo que es muy conveniente que el lector se familiarice con él.

Corolario 5.1.9 *En el teorema anterior se tiene:* $Df(\vec{x}_0)(\vec{h}) = \sum\limits_{i=1}^{n} h_i T_i(\vec{x}_0)$. ❑

Corolario 5.1.10 *Si* $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *es una función diferenciable en* $\vec{x}_0 \in \mathring{A}$, *entonces* f *es continua en* $\vec{x}_0$.

<u>*Demostración*</u>. Se tiene que existen $T_1, \ldots, T_n : A \to \mathbb{R}^m$ funciones continuas en $\vec{x}_0$ tales que

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_i^0)T_i(\vec{x}) \quad \text{para toda} \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Puesto que el dado derecho de la igualdad es una función continua $\vec{x}_0$, se tiene que f es continua en $\vec{x}_0$. ❑

Observaciones 5.1.11

(1).- Sea $f : A \to \mathbb{R}^m$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ una función diferenciable en $\vec{x}_0 \in \mathring{A}$. Sean $T_1, \ldots, T_n : A \to \mathbb{R}^m$ tales que

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^0) T_i(\vec{x}) \ \forall \vec{x} \in A.$$

Entonces

$$\lim_{x_i \to x_i^0} \frac{f(x_1^{(0)}, \ldots x_{i-1}^{(0)}, x_i, x_{i+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) - f(x_1^{(0)}, \ldots, x_i^{(0)}, \ldots x_n^{(0)})}{x_i - x_i^{(0)}} =$$

$$= \lim_{x_i \to x_i^{(0)}} \frac{(x_i - x_i^{(0)}) T_i(x_i^{(0)}, \ldots, x_{i-1}^{(0)}, x_i, \ldots, x_n^{(0)})}{(x_i - x_i^{(0)})} = T_i(\vec{x}_0).$$

Por lo tanto

$$T_i(\vec{x}_0) = \lim_{x_i \to x_i^{(0)}} \frac{f(x_1^{(0)}, \ldots, x_i, \ldots, x_n^{(0)}) - f(\vec{x}_0)}{x_i - x_i^{(0)}}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Se sigue que las $T_i(\vec{x}_0)$ están unívocamente determinadas y se denotan por:

$$T_i(\vec{x}_0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0).$$

(2).- En el teorema anterior se tiene que:

$$Df(\vec{x}_0)(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i T_i(\vec{x}_0) = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0).$$

Por lo tanto

$$Df(\vec{x}_0)(\vec{e}_i) = T_i(\vec{x}_0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0).$$

Teorema 5.1.12 (Regla de la Cadena) *Sean $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g : B \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ tales que $f(A) \subseteq B$. Sean $\vec{x}_0 \in \mathring{A}$ y $\vec{y}_0 = f(\vec{x}_0) \in \mathring{B}$ tales que f es diferenciable en $\vec{x}_0$ y g es diferenciable en $\vec{y}_0$. Entonces $g \circ f : A \to \mathbb{R}^p$ es diferenciable en $\vec{x}_0$ y*

$$D(g \circ f)(\vec{x}_0) = Dg(\vec{y}_0) \circ Df(\vec{x}_0) = Dg(f(\vec{x}_0)) \circ Df(\vec{x}_0).$$

Equivalentemente

$$(g \circ f)'(\vec{x}_0) = g'(f(\vec{x}_0)) \circ f'(\vec{x}_0).$$

<u>*Demostración*</u>. Se tiene: $f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - x_i^{(0)})T_i(\vec{x})$ para toda $\vec{x} \in A$, donde $T_i : A \to \mathbb{R}^m$ es continua en $\vec{x}_0$, $1 \leq i \leq m$.

Ahora $Df(\vec{x}_0)(\vec{h}) = f'(\vec{x}_0)(\vec{h}) = \sum\limits_{i=1}^{n} h_i T_i(\vec{x}_0)$.

Por componentes se tiene que si $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$, $f_j : A \to \mathbb{R}$, entonces, $f_j(\vec{x}) = f_j(\vec{x}_0) + \sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - x_1^{(0)})T_i^{(j)}(\vec{x})$, donde $T_i = (T_i^{(1)}, \ldots, T_i^{(m)})$.

Por otro lado existen $H_1, \ldots, H_m : B \to \mathbb{R}^p$ funciones continuas en $\vec{y}_0$ tales que

$$g(\vec{y}) = g(\vec{y}_0) + \sum_{j=1}^{m}(y_j - y_j^{(0)})H_j(\vec{y}) \quad \text{para toda} \quad \vec{y} \in B \quad \text{y} \quad g'(\vec{y}_0)(\vec{k}) = \sum_{j=1}^{m} k_j H_j(\vec{y}_0).$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} g(f(\vec{x}) &= g(f(\vec{x}_0)) + \sum_{j=1}^{m}(f_j(\vec{x}) - f_j(\vec{x}_0))H_j(f(\vec{x})) = \\ &= g(f(\vec{x}_0)) + \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_i^{(0)})T_i^{(j)}(\vec{x})H_j(f(\vec{x})) = \\ &= g(f(\vec{x}_0)) + \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_i^{(0)}) \cdot \left\{\sum_{j=1}^{m} T_i^{(j)}(\vec{x}) \cdot H_j(f(\vec{x}))\right\}. \end{aligned}$$

Ahora, para toda $1 \leq i \leq n$, la función $\sum\limits_{j=1}^{m} T_i^{(j)}(\vec{x})H_j(f(\vec{x}))$ es continua en $\vec{x}_0$. Por tanto $g \circ f$ es diferenciable en $\vec{x}_0$ y se tiene:

$$\begin{aligned} (g \circ f)'(\vec{x}_0)(\vec{h}) &= \sum_{i=1}^{n} h_i \sum_{j=1}^{m} T_i^{(j)}(\vec{x}_0) \cdot H_j(f(\vec{x})) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} h_i \Big[g'(f(\vec{x}_0))(T_i(\vec{x}_0))\Big] = g'(f(\vec{x}_0))\Big(\sum_{i=1}^{n} h_i T_i(\vec{x}_0)\Big) = \\ &= g'(f(\vec{x}_0)) \circ (f'(\vec{x}_0)(\vec{h})). \end{aligned}$$

Se sigue que

$$(g \circ f)'(\vec{x}_0) = g'(f(\vec{x}_0)) \circ f'(\vec{x}_0) \quad \text{o} \quad D(g \circ f)(\vec{x}_0) = Dg(f(\vec{x}_0)) \circ Df(\vec{x}_0). \qquad ❏$$

Teorema 5.1.13 *Sean* $f\colon A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\vec{x}_0 \in \mathring{A}$ *y* $f = (f_1, \ldots, f_m)$, $f_i\colon A \to \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$. *Entonces* f *es diferenciable en* $\vec{x}_0 \iff f_i$ *es diferenciable en* $\vec{x}_0$ *para toda* $1 \leq i \leq n$.

En este caso se tendrá: $Df(\vec{x}_0) = (Df_1(\vec{x}_0), Df_2(\vec{x}_0), \ldots, Df_m(\vec{x}_0))$.

Matricialmente esto significa que con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^n$, $Df(\vec{x}_0)$ *es la matriz cuya i-ésima fila es* $Df_i(\vec{x}_0)$.

<u>*Demostración*</u>.

<u>$\Rightarrow)$</u> Sea f diferenciable en $\vec{x}_0$. Existen $T_1, \ldots, T_n : A \to \mathbb{R}^m$ funciones continuas en $\vec{x}_0$ tales que $f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - x_i^{(0)})T_i(\vec{x})$ para toda $\vec{x} \in A$.

Sea $T_i(\vec{x}) = (T_i^{(1)}(\vec{x}), \ldots, T_i^{(j)}(\vec{x}), \ldots, T_i^{(m)}(\vec{x}))$, $1 \leq i \leq n$. Entonces para toda $1 \leq j \leq m$ se tiene que $f_j(\vec{x}) = f_j(\vec{x}_0) + \sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - x_i^{(0)})T_i^{(j)}(\vec{x})$ y $T_1^{(j)}, \ldots, T_n^{(j)} : A \to \mathbb{R}$ son funciones continuas en $\vec{x}_0$. Se sigue que f_j es diferenciable para toda $1 \leq j \leq m$.

<u>$\Leftarrow)$</u> Para cada $1 \leq j \leq m$, existen $T_1^{(j)}, \ldots, T_n^{(j)} : A \to \mathbb{R}$ funciones continuas en $\vec{x}_0$ tales que

$$f_j(\vec{x}) = f_j(\vec{x}_0) + \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_1^{(0)})T_i^{(j)}(\vec{x}_0).$$

Sea $T_i(\vec{x}) = (T_i^{(1)}(\vec{x}), T_i^{(2)}(\vec{x}), \ldots, T_i^{(j)}(\vec{x}), \ldots, T_i^{(m)}(\vec{x}))$ donde T_i es continua en $\vec{x}_0$ para toda $1 \leq i \leq n$ y $f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - x_i^{(0)})T_i(\vec{x})$ para toda $\vec{x} \in A$. Por lo tanto f es diferenciable en $\vec{x}_0$ y se tiene:

$$Df(\vec{x}_0)(\vec{h}) = \sum_{i=1}^{m} h_i T_i(\vec{x}_0) \quad \text{así que} \quad (Df(\vec{x}_0)(\vec{h}))_{(j)} = \sum_{i=1}^{n} h_i T_i^{(j)}(\vec{x}_0) = Df_j(\vec{x}_0)(\vec{h}).$$

Se sigue que

$$Df(\vec{x}_0) = (Df_1(\vec{x}_0), \ldots, Df_m(\vec{x}_0)).$$ ❏

Proposición 5.1.14

i).- *Sea* $s \colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ *la suma, es decir:* $s(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x} + \vec{y}$. *Entonces* s *es diferenciable y* $Ds(\vec{x}_0, \vec{y}_0) = s$ *para toda* $(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$.

ii).- *Sea* $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *el producto, es decir,* $p(x, y) = xy$. *Entonces* p *es diferenciable y* $Dp(x_0, y_0)(h, k) = p(x_0, k) + p(h, y_0) = x_0\ k + y_0 h$.

<u>*Demostración*</u>.

i).- La función s es lineal, por lo tanto s es diferenciable y para toda $(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \in \mathbb{R}^m$, $Ds(\vec{x}_0, \vec{y}_0) = s$.

ii).- La función p es bilineal por lo que p es diferenciable y $Dp(x_0, y_0)(h, k) = p(x_0, k) + p(h, y_0)$. ❏

Teorema 5.1.15 *Sea* $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\vec{x}_0 \in \mathring{A}$. *Sean* $f, g : A \to \mathbb{R}^m$ *y* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Entonces si* f *y* g *son diferenciables en* $\vec{x}_0$, *se tiene:*

i).- *$f+g$ es diferenciable en $\vec{x}_0$ y $D(f+g)(\vec{x}_0) = Df(\vec{x}_0) + Dg(\vec{x}_0)$.*

ii).- *λf es diferenciable en $\vec{x}_0$ y $D(\lambda f)(\vec{x}_0) = \lambda Df(\vec{x}_0)$.*

iii).- *Si $m = 1$, $f \cdot g$ es diferenciable en $\vec{x}_0$ y*

$$D(f \cdot g)(\vec{x}_0) = g(\vec{x}_0)Df(\vec{x}_0) + f(\vec{x}_0)Dg(\vec{x}_0).$$

iv).- *Si $m = 1$ y $g(\vec{x}_0) \neq 0$, entonces $\dfrac{f}{g}$ es diferenciable en $\vec{x}_0$ y*

$$D\left(\frac{f}{g}\right)(\vec{x}_0) = \frac{g(\vec{x}_0)Df(\vec{x}_0) - f(\vec{x}_0)Dg(\vec{x}_0)}{[g(\vec{x}_0)]^2.}$$

Demostración.

i).- Se tiene:

$$\begin{array}{ccccc} A \subseteq \mathbb{R}^n & \xrightarrow{F} & \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m & \xrightarrow{s} & \mathbb{R}^m \\ \vec{x} & \longmapsto & (f(\vec{x}), g(\vec{x})) & \longmapsto & f(\vec{x}) + g(\vec{x}). \end{array}$$

Se sigue que $s \circ F = f + g$ y por el teorema y las proposiciones anteriores, que tanto s como F son diferencialbes de donde se sigue que $f + g$ es diferenciable en $\vec{x}_0$ y $D(s \circ F)(\vec{x}_0) = D(f+g)(\vec{x}_0) = Ds(F(\vec{x}_0)) \circ DF(\vec{x}_0) = s \circ (Df(\vec{x}_0), Dg(\vec{x}_0)) = Df(\vec{x}_0) + Dg(\vec{x}_0)$.

ii).- Sean $T_1, \ldots, T_n : A \to \mathbb{R}^m$ funciones continuas en $\vec{x}_0$ tales que

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_i^{(0)})T_i(\vec{x})$$

por lo que

$$\lambda f(\vec{x}) = \lambda f(\vec{x}_0) + \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_i^{(0)})\lambda T_i(\vec{x}).$$

Por lo tanto λf es diferenciable en $\vec{x}_0$ y

$$D(\lambda f(\vec{x}_0))(\vec{h}) = \sum_{i=1}^{n} h_i(\lambda T_i(\vec{x}_0)) = \lambda(\sum_{i=1}^{n} h_i T_i(\vec{x})) = \lambda Df(\vec{x}_0).$$

iii).- Sea

$$\begin{array}{ccccc} A \subseteq \mathbb{R}^n & \stackrel{H}{\longrightarrow} & \mathbb{R}^2 & \stackrel{P}{\longrightarrow} & \mathbb{R} \\ \vec{x} & \longmapsto & (f(\vec{x}), g(\vec{x})) & \longmapsto & f(\vec{x})g(\vec{x}). \end{array}$$

Se tiene $f \cdot g = p \circ H$ y tanto p como H son diferenciables (p en $(f(\vec{x}_0), g(\vec{x}_0))$ y H en $\vec{x}_0$) por lo que fg es diferenciable en $\vec{x}_0$ y

$$\begin{aligned}(D(p \circ H)(\vec{x}_0))(\vec{h}) &= \{(Dp)(H(\vec{x}_0)) \circ DH(\vec{x})\}(\vec{h}) = \\ &= \{(Dp)(f(\vec{x}_0), g(\vec{x}_0))\}(Df(\vec{x}_0)(\vec{h}), Dg(\vec{x}_0)(\vec{h})) = \\ &= f(\vec{x}_0)Dg(\vec{x}_0)(\vec{h}) + g(\vec{x}_0)Df(\vec{x}_0)(\vec{h}).\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$D((f \cdot g)(\vec{x}_0)) = f(\vec{x}_0)Dg(\vec{x}_0) + g(\vec{x}_0)Df(\vec{x}_0).$$

iv).- Puesto que g es continua en $\vec{x}_0$ existe $\delta > 0$ tal que $B(\vec{x}_0, \delta) \subseteq A$ y $g(\vec{x}_0) \neq 0$ para toda $\vec{x} \in B(\vec{x}_0, \delta)$.

Sean $T_1, \ldots, T_n : A \to \mathbb{R}$ funciones continuas en $\vec{x}_0$ tales que

$$g(\vec{x}) = g(\vec{x}_0) + \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_i^{(0)})T_i(\vec{x}).$$

Por lo tanto, para toda $\vec{x} \in B(\vec{x}_0, \delta)$ se tiene

$$\frac{1}{g(\vec{x}_0)} = \frac{1}{g(\vec{x})} + \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_i^{(0)})\frac{T_i(\vec{x})}{g(\vec{x})g(\vec{x}_0)},$$

de donde

$$\frac{1}{g(\vec{x})} = \frac{1}{g(\vec{x}_0)} + \sum_{i=1}^{m}(x_i - x_i^{(0)})\left(-\frac{T_i(\vec{x})}{g(\vec{x})g(\vec{x}_0)}\right)$$

y $-\dfrac{T_i(\vec{x})}{g(\vec{x})g(\vec{x}_0)}$ es continua en $\vec{x}_0$ para toda $1 \leq i \leq n$ por lo que $\dfrac{1}{g}$ es diferenciable en $\vec{x}_0$ y

$$\begin{aligned}D\left(\frac{1}{g}\right)(\vec{x}_0)(\vec{h}) &= \sum_{i=1}^{n} h_i\left(-\frac{T_i(\vec{x}_0)}{g(x_0)g(\vec{x}_0)}\right) = \\ &= -\frac{1}{(g(\vec{x}_0))^2}\sum_{i=1}^{n} h_i T_i(\vec{x}_0) = -\frac{Dg(\vec{x}_0)(\vec{h})}{[g(\vec{x}_0)]^2}.\end{aligned}$$

Por último, $\dfrac{f}{g} = f \cdot \dfrac{1}{g}$ de donde se sigue que $\dfrac{f}{g}$ es diferenciable en $\vec{x}_0$ y

$$\begin{aligned} D\left(\frac{f}{g}\right)(\vec{x}_0) &= f(\vec{x}_0) D\left(\frac{1}{g}\right)(\vec{x}_0) + \frac{1}{g}(\vec{x}_0) D(f(\vec{x}_0)) = \\ &= -\frac{f(\vec{x}_0) Dg(\vec{x}_0)}{[g(\vec{x}_0)]^2} + \frac{Df(\vec{x}_0)}{g(\vec{x}_0)} = \frac{g(\vec{x}_0) Df(\vec{x}_0) - f(\vec{x}_0) Dg(\vec{x}_0)}{[g(\vec{x}_0)]^2}. \quad ❑ \end{aligned}$$

5.2 Derivadas parciales y representación matricial

En la sección anterior se establecieron los resultados teóricos para el cálculo diferencial. Ahora se estudiarán las derivadas con el fin de poder calcularlas de manera eficiente.

Si $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una función diferenciable en $\vec{x}_0 \in \mathring{A}$, entonces se definió anteriormente la derivada parcial como

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i^0 + h, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0) - f(\vec{x}_0)}{h} \in \mathbb{R}^m.$$

Definición 5.2.1 A $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0) = D_i f(\vec{x}_0)$ se le llama la *i-ésima derivada parcial de f en $\vec{x}_0$.*

Ahora si $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ entonces $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0) = \left(\dfrac{\partial f_1}{\partial x_i}(\vec{x}_0), \dfrac{\partial f_2}{\partial x_i}(\vec{x}_0), \ldots, \dfrac{\partial f_m}{\partial x_i}(\vec{x}_0)\right)$. En particular $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0)$ existe $\iff$ $\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}(\vec{x}_0)$ existe para toda $1 \le j \le m$.

Se tiene que $\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}(\vec{x}_0) =: D^i f_j(\vec{x}_0)$ se calcula como una derivada en $\mathbb{R}$ dejando fijos a $x_1^{(0)}, \ldots, x_{i-1}^{(0)}, x_{i+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$ y consideramos como variable a x_i.

Con mayor precisión, sea $g(x_i) = f_j(x_1^{(0)}, \ldots, x_{i-1}^{(0)}, x_i, x_{i+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$, $g\colon C \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_i^{(0)} \in \mathring{C}$ y

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\vec{x}_0) = g'(x_i^{(0)}) = \frac{dg}{dx_i}(x_i^{(0)}).$$

Ejemplos 5.2.2

(1).- Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^y$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{(x_0 + t)^{y_0} - x_0^{y_0}}{t} = y_0 x_0^{y_0 - 1}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{x_0^{y_0 + t} - x_0^{y_0}}{t} = \\ &= (e^{y \ln x_0})'|_{y_0} = (\ln x_0) e^{y_0 \ln x_0} = x_0^{y_0} \ln x_0. \end{aligned}$$

Por lo tanto
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=yx^{y-1} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=(\ln x)x^y.$$

(2).- Sea $f\colon A\subseteq\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ dada por $f(x,y,z)=\dfrac{x\operatorname{sen} y}{z}$, $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z\neq 0\}$. Se tiene que
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\operatorname{sen} y}{z};\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{x\cos y}{z};\quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y)=-\frac{x\operatorname{sen} y}{z^2}.$$

(3).- Sea $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua y sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dada por: $f(x,y)=\displaystyle\int_a^{xy} g(t)dt$.

Se tiene que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=g(x_0y_0)y_0$ por lo que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=g(xy)y$ y puesto que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=g(x_0y_0)x_0$ obtenemos que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=g(xy)x$.

Observación 5.2.3 Sea $f:A\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ una función diferenciable en $\vec{x}_0\in\mathring{A}$. Entonces $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0)$ existe para toda $1\leq i\leq n$ pues $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0)=T_i(\vec{x}_0)$. Se sigue que $\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}(\vec{x}_0)$ existen para toda $1\leq i\leq n$, $1\leq j\leq m$.

Sin embargo el recíproco no se cumple, es decir, puede suceder que $\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}(\vec{x}_0)$ existan para toda $1\leq j\leq m$ y para toda $1\leq i\leq n$ sin que f sea diferenciable en $\vec{x}_0$.

Ejemplo 5.2.4 Sea $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dada por:
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

Ahora:
$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x}=0,\\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{0-0}{y}=0.\end{aligned}$$

Sin embargo si tomamos $(x_n,y_n)=\left(\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}(0,0)$,
$$f(x_n,y_n)=\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{2}\neq 0=f(0,0)$$

por lo tanto f no es continua en $(0,0)$, y por tanto f no es diferenciable en $(0,0)$.

Sea $f\colon A\subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función diferenciable en $\vec{x}_0 \in \mathring{A}$. Entonces existen $T_1,\ldots,T_n\colon A\to\mathbb{R}^m$ funciones continuas en $\vec{x}_0$ tales que $f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0)+\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_i^{(0)})T_i(\vec{x})$ con $T_i(\vec{x}_0)=\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0)$. Por lo tanto

$$Df(\vec{x}_0)(\vec{h}) = \sum_{i=1}^{n} h_i T_i(\vec{x}_0) = \sum_{\partial x_i}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0).$$

Consideremos las bases canónicas $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^n$, $\{\vec{E}_j\}_{j=1}^m$ de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ respectivamente y sea

$$Df(\vec{x}_0)(\vec{e}_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(\vec{x}_0),\ldots,\frac{\partial f_m}{\partial x_i}(\vec{x}_0)\right) = \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(\vec{x}_0)\vec{E}_1 + \cdots + \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(\vec{x}_0)\vec{E}_m.$$

Por lo tanto la matriz de $Df(\vec{x}_0)$ con respecto a las bases canónicas de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ será:

$$\begin{aligned}
f'(\vec{x}_0) = Df(\vec{x}_0) &= \begin{pmatrix}
\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(\vec{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{x}_0)\\
\vdots & & \vdots & & \vdots\\
\frac{\partial f_j}{\partial x_1}(\vec{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\vec{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_j}{\partial x_n}(\vec{x}_0)\\
\vdots & & \vdots & & \vdots\\
\frac{\partial f_m}{\partial x_i}(\vec{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(\vec{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\vec{x}_0)
\end{pmatrix} =\\
&= \begin{pmatrix}
D_1 f_1(\vec{x}_0) & \cdots & D_i f_1(\vec{x}_0) & \cdots & D_n f_1(\vec{x}_0)\\
\vdots & & \vdots & & \vdots\\
D_1 f_j(\vec{x}_0) & \cdots & D_i f_j(\vec{x}_0) & \cdots & D_n f_j(\vec{x}_0)\\
\vdots & & \vdots & & \vdots\\
D_1 f_m(\vec{x}_0) & \cdots & D_i f_m(\vec{x}_0) & \cdots & D_n f_m(\vec{x}_0)
\end{pmatrix} =\\
&= \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_0}(\vec{x}_i)\right)_{1\le i\le n \leftarrow \text{ columnas}}^{1\le j\le m \leftarrow \text{ filas}} =: \frac{\partial(f_1,f_2,\ldots,f_m)}{\partial(x_1x_2,\ldots,x_m)}.
\end{aligned}$$

Definición 5.2.5 La matriz $\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\vec{x}_0)\right)_{1\le i\le n}^{1\le j\le m}$ se llama la *matriz jacobiana de f en $\vec{x}_0$* y al determinante de esta matriz se llama el *jacobiano de f en $\vec{x}_0$*.

Ejemplos 5.2.6

(1).- Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x,y,z) = \int_a^{\int_b^{xyz} g(t)dt} g(t)dt \ .$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) &= g\left(\int_b^{x_0y_0z_0} g(t)dt\right) \cdot g(x_0y_0z_0) \cdot y_0 \cdot z_0,\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) &= g\left(\int_b^{x_0y_0z_0} g(t)dt\right) \cdot g(x_0y_0z_0) \cdot x_0 \cdot z_0,\\
\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) &= g\left(\int_b^{x_0y_0z_0} g(t)dt\right) \cdot g(x_0y_0z_0) \cdot x_0 \cdot y_0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
Df(x_0,y_0,z_0) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0), \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\right) =\\
&= g\left(\int_b^{x_0y_0z_0} g(t)dt\right) \cdot g(x_0y_0z_0) \cdot (y_0z_0, x_0z_0, x_0y_0).
\end{aligned}$$

(2).- Sea $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la función dada por:

$$f(x,y,z) = (x^4y, xe^z) = (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z)).$$

Entonces

$$\begin{aligned}
Df(x,y,z) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z) \end{pmatrix} =\\
&= \begin{pmatrix} 4x^3y & x^4 & 0 \\ e^z & 0 & xe^z \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(3).- Calculemos aproximadamente $(2.01)^{3.001}$.

Sea $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ y sea $f : A \to \mathbb{R}$ la función $f(x,y) = x^y$.

Sea $(x_0,y_0) = (2,3)$. Se tiene que el plano tangente de f en (x_0,y_0) es: $p(x,y) = f(x_0,y_0) + Df(x_0,y_0)((x-x_0, y-y_0))$ (después veremos que en efecto $Df(x_0,y_0)$ existe) y se tiene: $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{|p(x,y) - f(x,y)|}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|} = 0$. Por lo

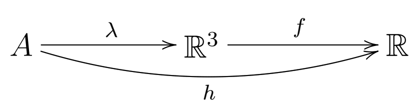
tanto $p(x,y) \cong f(x,y)$ en una vecindad de (x_0,y_0). Se sigue que

$$\begin{aligned} f(2.01,3.001) &= (2.01)^{3.001} \cong p(2.01,3.001) = \\ &= f(2,3) + (y_0 x_0^{y_0-1}, (\ln x_0) x_0^{y_0}) \begin{pmatrix} .01 \\ .001 \end{pmatrix} = \\ &= 8 + (3 \cdot 2^2, (\ln 2)8) \begin{pmatrix} .01 \\ .001 \end{pmatrix} = 8 + .12 + \frac{(\ln 2)8}{1000} \cong 8.12. \end{aligned}$$

(4).- **Coordenadas esféricas**

$$\begin{array}{llll} \text{Sean:} & 0 \leq r < \infty, & \text{Se tiene:} & x = r \operatorname{sen}\theta \cos\phi, \\ & 0 \leq \phi \leq 2\pi, & & y = r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \\ & 0 \leq \theta \leq \pi. & & z = r\cos\theta. \end{array}$$

Sea h en coordenadas esféricas, $h\colon A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $h(r,\phi,\theta)$. Ahora sea f dada en coordenadas restangulares, $f : B \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z)$ definida de tal forma que $h(r,\phi,\theta)$" = "$f(x,y,z)$. Con mayor precisión sean $A = (\mathbb{R}^+ \cup \{0\}) \times [0,2\pi] \times [0,\pi] \subseteq \mathbb{R}^3$ y $\lambda : A \to \mathbb{R}^3$ dada por $\lambda(r,\phi,\theta) = (x,y,z)$ y entonces $h = f \circ \lambda$.



$$(r,\phi,\theta) \longrightarrow (x,y,z) \longrightarrow f(x,y,z).$$

Se tiene:

$$(Dh)(r,\phi,\theta) = \left(\frac{\partial h}{\partial r}, \frac{\partial h}{\partial \phi}, \frac{\partial h}{\partial \theta}\right)\Big|_{(r,\phi,\theta)} = Df(\lambda(r,\phi,\theta)) \cdot D\lambda(r,\phi,\theta) =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)\Big|_{\lambda(r,\phi,\theta)=(x,y,z)} \left(\begin{array}{ccc} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{array}\right)\Bigg|_{(r,\phi,\theta)} =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \left(\begin{array}{ccc} \operatorname{sen}\theta\cos\phi & -r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi & r\cos\theta\cos\phi \\ \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi & r\operatorname{sen}\theta\cos\phi & r\cos\theta\operatorname{sen}\phi \\ \cos\theta & 0 & -r\operatorname{sen}\theta \end{array}\right) =$$

$$= \Big(\operatorname{sen}\theta\cos\phi\frac{\partial f}{\partial x} + (\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi)\frac{\partial f}{\partial y} + \cos\theta\frac{\partial f}{\partial z},$$
$$(-r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi)\frac{\partial f}{\partial x} + (r\operatorname{sen}\theta\cos\phi)\frac{\partial f}{\partial y},$$
$$(r\cos\theta\cos\phi)\frac{\partial f}{\partial x} + (r\cos\theta\operatorname{sen}\phi)\frac{\partial f}{\partial y} - (r\operatorname{sen}\theta)\frac{\partial f}{\partial z}\Big).$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial r} &= \operatorname{sen}\theta\cos\phi\frac{\partial f}{\partial x} + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi\frac{\partial f}{\partial y} + \cos\theta\frac{\partial f}{\partial z}, \\ \frac{\partial h}{\partial \phi} &= -r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi\frac{\partial f}{\partial x} + r\operatorname{sen}\theta\cos\phi\frac{\partial f}{\partial y}, \\ \frac{\partial h}{\partial \theta} &= r\cos\theta\cos\phi\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\operatorname{sen}\phi\frac{\partial f}{\partial y} - r\operatorname{sen}\theta\frac{\partial f}{\partial z}. \end{aligned}$$

(5).- ¿Cual es el plano tangente a la superficie $z = x^3 + y^4$ en $x = 1$, $y = 3$?

Para responder esta pregunta definamos $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por $f(x,y) = z = x^3 + y^4$ la cual es diferenciable (por ser producto y suma de funciones diferenciables) y $Df(1,3) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,3), \frac{\partial f}{\partial y}(1,3)\right) = (3x^2, 4y^3)|_{(1,3)} = (3, 108)$.

Por lo tanto

$$z = p(x,y) = f(1,3) + Df(1,3)\left(\begin{array}{c} x-1 \\ y-3 \end{array}\right) = 1 + 81 + (3,108)\left(\begin{array}{c} x-1 \\ y-3 \end{array}\right) =$$
$$= 82 + 3x - 3 + 108y - 324.$$

De esta forma obtenemos que el plano tangente es:

$$3x + 108y - z = 245.$$

(6).- Verifiquemos la regla de la cadena para:

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= xe^y, \quad v(x,y,z) = (\operatorname{sen} x)yz, \quad f(u,v) = u^2 + v \operatorname{sen} u \;\; \text{y} \\ h(x,y,z) &= f(u(x,y,z), v(x,y,z)). \end{aligned}$$

Se tiene: $u, v : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$.

Ahora

$$\begin{aligned} h(x,y,z) = f(u(x,y,z), v(x,y,z)) = f(xe^y, (\operatorname{sen} x)yz) = \\ = (xe^y)^2 + ((\operatorname{sen} x)yz) \operatorname{sen}(xe^y). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} Dh &= \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}, \frac{\partial h}{\partial z} \right); \\ \frac{\partial h}{\partial x} &= 2xe^{2y} + yz \cos x \operatorname{sen}(xe^y) + yz \operatorname{sen} x \cos(xe^y) e^y, \\ \frac{\partial h}{\partial y} &= 2x^2 e^{2y} + (\operatorname{sen} x) z \operatorname{sen}(xe^y) + (\operatorname{sen} x) yz \cos(xe^y) xe^y, \\ \frac{\partial h}{\partial z} &= (\operatorname{sen} x) y (\operatorname{sen}(xe^y)). \end{aligned}$$

Se tiene que:

$$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{g=(u,v)} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

$$(x,y,x) \longrightarrow (u,v) \longrightarrow f(u,v)$$

$$(x,y,x) \xrightarrow{h} f(u,v)$$

de tal forma que $h = f \circ g$. Se sigue que

$$
\begin{aligned}
Dh(x,y,z) &= (Df)(g(x,y,z)) \circ Dg(x,y,z) = \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}\right)\bigg|_{g(x,y,z)} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \end{pmatrix} = \\
&= (2u + v\cos u, \operatorname{sen} u)\big|_{g(x,y,z)} \begin{pmatrix} e^y & xe^y & 0 \\ yz\cos x & z\operatorname{sen} x & y\operatorname{sen} x \end{pmatrix} = \\
&= \Big(2u \cdot e^y + v\cos u \cdot e^y + \operatorname{sen} u \cdot yz\cos x, \\
&\quad 2u \cdot xe^y + v\cos u \cdot xe^y + \operatorname{sen} u \cdot z\operatorname{sen} x, \operatorname{sen} u \cdot y\operatorname{sen} x\Big) = \\
&\qquad (\text{en } u = xe^y, v = (\operatorname{sen} x)\cdot yz) \\
&= \Big(2xe^{2y} + (\operatorname{sen} x)yz\cos(xe^y)\cdot e^y + \operatorname{sen}(xe^y)\cdot yz\cos x, \\
&\quad 2(xe^y)^2 + xe^y \cdot (\operatorname{sen} x)\cdot yz \cdot \cos(xe^y) + \operatorname{sen}(xe^y)\cdot z\operatorname{sen} x, \\
&\quad \operatorname{sen}(xe^y)\cdot y(\operatorname{sen} x)\Big) = \\
&= \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}, \frac{\partial h}{\partial z}\right)
\end{aligned}
$$

obteniendo la igualdad anterior.

A continuación enunciaremos un teorema que nos caracteriza la diferencialidad de funciones por medio de sus derivadas parciales.

Teorema 5.2.7 *Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}^m$, $\vec{x}_0 \in \mathring{A}$. Sea $f = (f_1, \ldots, f_m)$. Supongamos que existe $\delta > 0$ tal que para toda $\vec{x} \in B(\vec{x}_0, \delta)$, $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\vec{x})$ existen para toda $1 \le i \le n$, para toda $1 \le j \le m$ y además $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\vec{x})$ es continua en $\vec{x}_0$ para toda $1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$. Entonces f es diferenciable en $\vec{x}_0$.*

Demostración. Consideramos $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in B(\vec{x}_0, \delta)$ y escribamos $\vec{x}_0 = \vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$.

Ahora sea $f = (f_1, \ldots, f_m)$. Entonces f es diferenciable en $\vec{x}_0 \iff f_j$ es diferenciable en $\vec{x}_0$ para toda $1 \le j \le m$, por lo tanto podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $m = 1$.

Ahora

$$
\begin{aligned}
f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) &= f(x_1, \dots, x_n) - f(a_1, \dots, a_n) = \\
&= f(x_1, \dots, x_n) - f(a_1, x_2, \dots, x_n) + f(a_1, x_2, \dots, x_n) - \\
&\quad - f(a_1, a_2, x_3, \dots, x_n) + \cdots + f(a_1, \dots, a_{n-1}, x_n) - f(a_1, \dots, a_n) = \\
&= \sum_{i=1}^{n} (f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, \dots, x_n) - f(a_1, \dots, a_i, x_{i+1}, \dots, x_n)).
\end{aligned}
$$

Sea $g_i : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por: $g(x) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n)$ con $x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n$ fijos y $B_i = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a_i| < \delta_i\}$ (para algún $\delta_i > 0$).

Por el teorema del valor medio, existe $c_i \in B_i$ (de tal forma que $a_i < c_i < x_i$ ó $x_i < c_i < a_i$) tal que $\dfrac{g_i(x_i) - g_i(a_i)}{x_i - a_i} = g'(c_i) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_{i-1}, c_i, x_{i+1}, \dots, x_n) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{c}_i)$, con $x_i \neq a_i$. Por lo tanto

$$
f(\vec{x}) - f(\vec{a}) = \sum_{i=1}^{n} (g_i(x_i) - g_i(a_i)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{c}_i)(x_i - a_i).
$$

Ahora sea $H_i : B(\vec{a}, \delta) \to \mathbb{R}^n$, $H_i(\vec{x}) = \vec{c}_i = (a_1, \dots, a_{i-1}, c_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$. Entonces

$$
\|H_i(\vec{x}) - \vec{a}\| = \sqrt{(c_i - a_i)^2 + \sum_{j=i+1}^{n} (x_j - a_j)^2} \leq \sqrt{\sum_{j=i}^{n} (x_j - a_j)^2} \leq \|\vec{x} - \vec{a}\|.
$$

Por lo tanto $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{a}} H(\vec{x}) = \vec{a} = H(\vec{a})$.

Ahora sea $T_i(\vec{x}) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(H(\vec{x}))$, entonces se tiene $f(\vec{x}) = f(\vec{a}) + \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - a_i) T_i(\vec{x})$.

Por último, puesto que H_i y $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ son continuas en $\vec{a}$, se tiene que T_i es contiunua en $\vec{a}$. Por lo tanto f es diferenciable en $\vec{a} = \vec{x}$. ❑

Observación 5.2.8 El recíproco de este teorema no se cumple.

Ejemplo 5.2.9 Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por:

$$
f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \operatorname{sen} \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & , \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \quad (x, y) = (0, 0). \end{cases}
$$

Se tiene:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{t^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{\sqrt{t^2}}}{t} = \lim_{t \to 0} t \left(\operatorname{sen} \frac{1}{|t|} \right) = 0, \\
\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{t^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{\sqrt{t^2}}}{t} = \lim_{t \to 0} t \left(\operatorname{sen} \frac{1}{|t|} \right) = 0.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, si $Df(0,0)$ existiese debería ser $Df(0,0) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\Big) = (0,0)$.

Vamos a ver que efectivamente $Df(0,0)$ existe y es igual a $(0,0)$. Se tiene

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\|f(x,y)-f(0,0)-Df(0,0)((x,y))\|}{\|(x,y)\|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left|(x^2+y^2)\operatorname{sen}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$
$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2}\left|\operatorname{sen}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = 0.$$

Por lo tanto f es diferenciable en $(0,0)$.

Ahora para cualquier $(x,y)\neq(0,0)$, se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2x\operatorname{sen}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + (x^2+y^2)\Big(\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big)\cdot\Big(-\frac{1}{2}\frac{2x}{(x^2+y^2)^{3/2}}\Big) = \\ &= 2x\operatorname{sen}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\Big(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big).\end{aligned}$$

Sea $(x_n,y_n) = \Big(\frac{1}{2\pi n}, 0\Big)$. Entonces $\frac{\partial f}{\partial x}(x_n,y_n) = \frac{1}{\pi n}\operatorname{sen}\pi n - \cos 2\pi n = -1 \xrightarrow[n\to\infty]{} -1 \neq 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$. Por lo tanto $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ no es continua en $(0,0)$ aunque f es diferenciable en $(0,0)$.

Se ha visto que la derivada nos da un plano tangente que aproxima a la función en una vecindad de (x_0,y_0). Sin embargo una generalización natural del concepto de derivada de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ sería definir la derivada, para funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, como derivadas por direcciones.

Definición 5.2.10 (Derivada direccional) Sean $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\vec{x}_0 \in \mathring{A}$ y sea $\vec{u}\in\mathbb{R}^m$ tal que $\|\vec{u}\| = 1$. Entonces la *derivada direccional de f en $\vec{x}_0$ en la dirección $\vec{u}$* se define como

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(\vec{x}_0+t\vec{u})-f(\vec{x}_0)}{t} =: D_{\vec{u}}f(\vec{x}_0)\in\mathbb{R}^m$$

siempre y cuando este límite exista.

Observaciones 5.2.11

(1).- Por los teoremas de límites se tiene que si $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$, entonces $D_{\vec{u}}f(\vec{x}_0)$ existe $\iff$ $D_{\vec{u}}f_j(\vec{x}_0)$ existe para toda $1\le j\le m$ y en este caso se tiene que:

$$D_{\vec{u}}f(\vec{x}_0) = (D_{\vec{u}}f_1(\vec{x}_0), D_{\vec{u}}f_2(\vec{x}_0), \ldots, D_{\vec{u}}f_m(\vec{x}_0)).$$

(2).- Se puede definir la derivada direccional para cualquier vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^m$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ como: $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(\vec{x}_0 + t\vec{v}) - f(\vec{x}_0)}{t}$. En este caso, sea $\vec{u} = \dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$, es decir, $\vec{u}$ es el vector unitario en la dirección de $\vec{v}$ y tenemos que

$$\begin{aligned} D_{\vec{v}} f(\vec{x}_0) &= D_{\|\vec{v}\|\vec{u}} f(\vec{x}_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{x}_0 + t\vec{v}) - f(\vec{x}_0)}{t} = \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{x}_0 + (t\|\vec{v}\|)\vec{u}) - f(\vec{x}_0)}{\dfrac{t \cdot \|\vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}} \underset{\substack{\uparrow \\ \lambda = t\|\vec{v}\|}}{=} \|\vec{v}\| \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(\vec{x}_0 + \lambda\vec{u}) - f(\vec{x}_0)}{\lambda} = \\ &= \|\vec{v}\| D_{\vec{u}} f(\vec{x}_0). \end{aligned}$$

Por lo tanto $D_{\vec{v}} f(\vec{x}) = \|\vec{v}\| D_{\vec{u}} f(\vec{x}_0)$.

(3).- Dada $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{u} \neq \vec{0}$, sea $g : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(t) = f(\vec{x}_0 + t\vec{u})$ donde $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Entonces se tiene que:

$$g'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{x}_0 + t\vec{u}) - f(\vec{x}_0)}{t} = D_{\vec{u}} f(\vec{x}_0).$$

Es decir, geométricamente nos fijamos en $\{(t, f(\vec{x}_0 + t\vec{u}) \mid t \in B\} = \Gamma_g$ y entonces $D_{\vec{u}} f(\vec{x}_0)$ es la pendiente de la tangente de Γ_g en el punto $(0, f(\vec{x}_0))$.

(4).- Se tiene: $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(\vec{x}_0 + t\vec{e}_i) - f(\vec{x}_0)}{t} = D_{\vec{e}_i} f(\vec{x}_0) = D_i f(\vec{x}_0)$, es decir las derivadas parciales son las derivadas direccionales en la dirección $\vec{e}_i$.

Ejemplo 5.2.12 Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + 3xy$. Sea $\vec{x}_0 = (2, 0)$ y sea $\vec{u} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\|\vec{u}\| = 1$ y

$$\begin{aligned} D_{\vec{u}} f(\vec{x}_0) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{x}_0 + t\vec{u}) - f(\vec{x}_0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f\Big(2 + \frac{t}{\sqrt{2}}, -\frac{t}{\sqrt{2}}\Big) - f(2, 0)}{t} = \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{\Big(2 + \frac{t}{\sqrt{2}}\Big)^2 + 3\Big(2 + \frac{t}{\sqrt{2}}\Big)\Big(-\frac{t}{\sqrt{2}}\Big) - 4}{t} = \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{\frac{4}{\sqrt{2}} t + \frac{t^2}{2} + \Big(6 + \frac{3t}{\sqrt{2}}\Big)\Big(-\frac{t}{\sqrt{2}}\Big)}{t} = \\ &= \frac{4}{\sqrt{2}} + \frac{0}{2} - \frac{6}{\sqrt{2}} - \frac{3(0)}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} - \frac{6}{\sqrt{2}} = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Proposición 5.2.13 *Sea* $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\vec{x}_0 \in \mathring{A}$ *y* $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ *tal que* $\|\vec{u}\| = 1$. *Entonces* $D_{\vec{u}} f(\vec{x}_0) = -D_{-\vec{u}} f(\vec{x}_0)$.

<u>*Demostración*</u>. Se tiene que

$$D_{-\vec{u}} f(\vec{x}_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\vec{x}_0 - t\vec{u}) - f(\vec{x}_0)}{t} \underset{\lambda=-t}{\overset{}{\underset{\uparrow}{=}}} \lim_{-\lambda\to 0} \frac{f(\vec{x}_0 + \lambda\vec{u}) - f(\vec{x}_0)}{-\lambda} =$$

$$= -\lim_{\lambda\to 0} \frac{f(\vec{x}_0 + \lambda\vec{u}) - f(\vec{x}_0)}{\lambda} = -D_{\vec{u}} f(\vec{x}_0).$$ ❏

Teorema 5.2.14 *Sea* $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *una función diferenciable en* $\vec{x}_0 \in \mathring{A}$. *Entonces para toda* $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{u} \neq \vec{0}$, $D_{\vec{u}} f(\vec{x}_0)$ *existe y* $D_{\vec{u}} f(\vec{x}_0) = Df(\vec{x}_0)(\vec{u})$.

<u>*Demostración*</u>. Primero pongamos $\|\vec{u}\| = 1$. Entonces

$$\lim_{t\to 0} \frac{\|f(\vec{x}_0 + t\vec{u}) - f(\vec{x}_0) - Df(\vec{x}_0)(t\vec{u})\|}{\|t\vec{u}\|} = 0 = \lim_{t\to 0} \left\| \frac{f(\vec{x}_0 + t\vec{u}) - f(\vec{x}_0)}{t} - Df(\vec{x}_0)(\vec{u}) \right\|.$$

Por lo tanto

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\vec{x}_0 + t\vec{u}) - f(\vec{x}_0)}{t} = Df(\vec{x}_0)(\vec{u}) = D_{\vec{u}} f(\vec{x}_0).$$

Sea ahora $\vec{u}$ arbitrario. Se tiene

$$D_{\vec{u}} f(\vec{x}_0) = \|\vec{u}\| D_{\vec{u}/\|\vec{u}\|} f(\vec{x}_0) = \|\vec{u}\| Df(\vec{x}_0)\left(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}\right) = \|\vec{u}\| \frac{1}{\|\vec{u}\|} Df(\vec{x}_0)(\vec{u}) = Df(\vec{x}_0)(\vec{u}).$$

Por lo tanto $D_{\vec{u}} f(\vec{x}_0) = Df(\vec{x}_0)(\vec{u})$. ❏

Corolario 5.2.15 *Si* $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *es una función diferenciable en* $\vec{x}_0 \in \mathring{A}$ *y si* $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ *son tales que* $\vec{u} \neq \vec{0}$ *y* $\vec{v} \neq \vec{0}$, *entonces* $D_{\vec{u}+\vec{v}} f(\vec{x}_0) = D_{\vec{u}} f(\vec{x}_0) + D_{\vec{v}} f(\vec{x}_0)$ *(aún en el caso de que* $\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$*).*

<u>*Demostración*</u>. Se tiene que:

$$D_{\vec{u}+\vec{v}} f(\vec{x}_0) = Df(\vec{x}_0)(\vec{u} + \vec{v}) = Df(\vec{x}_0)(\vec{u}) + Df(\vec{x}_0)(\vec{v}) = D_{\vec{u}} f(\vec{x}_0) + D_{\vec{v}} f(\vec{x}_0).$$ ❏

Observaciones 5.2.16

(1).- El teorema anterior nos dice que el "plano" tangente a $f(\vec{x})$ en el punto $\vec{x}_0$ es

$$P(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + Df(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0)$$

pues para cada dirección, $D_{\vec{u}} f(\vec{x}_0) = Df(\vec{x}_0)(\vec{u})$ nos da un "vector" tangente a $f(\vec{x})$ en $\vec{x}_0$ en la dirección $\vec{u}$.

(2).- Puede existir una función con todas sus derivadas direccionales en un punto y esta función no ser continua en el punto y por tanto no ser diferenciable.

Ejemplo 5.2.17 Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y} & , \quad x^2 \neq -y \\ 0 & , \quad x^2 = -y \end{cases} .$$

Sea $\vec{x}_0 = (0,0)$, $\vec{u} = (u_1, u_2)$ tal que $\|\vec{u}\| = (u_1^2 + u_2^2)^{1/2} = 1$ y $u_1^2 \neq = -u_2$. Entonces si $u_2 \neq 0$, se tiene

$$D_{\vec{u}} f(\vec{x}_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\vec{x}_0 + t\vec{u}) - f(\vec{x}_0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(t\vec{u})}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2 u_1 u_2}{t^2 u_1^2 + t u_2} \cdot \frac{1}{t} =$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{t u_1 u_2}{t^2 u_1^2 + t u_2} = \lim_{t\to 0} \frac{u_1 u_2}{t u_1^2 + u^2} = \frac{u_1 u_2}{u_2} = u_1.$$

Ahora si $u_2 = 0$, $f(\vec{x}_0 + t\vec{u}) = 0$ por lo que $D_{\vec{u}} f(\vec{x}_0) = 0$.

Por último si $u_1^2 = -u_2$ entonces $f(\vec{x}_0 + t\vec{u}) = 0$ por lo que $D_{\vec{u}} f(\vec{x}_0) = 0$. Por lo tanto f tiene todas sus derivadas direccionales en $\vec{x}_0 = (0,0)$.

Ahora, f no es continua en $(0,0)$ pues sea $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n^2+1}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0)$ y

$$f(x_n, y_n) = \frac{\frac{1}{n}\left(-\frac{1}{n^2+1}\right)}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2+1}} = \frac{-\frac{1}{n(n^2+1)}}{\frac{1}{n^2(n^2+1)}} = -n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty.$$

Observación 5.2.18 Sea $\vec{u} = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$. Entonces si $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^n$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$, se tiene:

$$D_{\vec{u}} f(\vec{x}_0) = Df(\vec{x}_0)(\vec{u}) = (Df(\vec{x}_0))(\sum_{i=1}^n u_i \vec{e}_i) = \sum_{i=1}^n u_i (Df(\vec{x}_0))(\vec{e}_i) = \sum_{i=1}^n u_i D_{\vec{e}_i} f(\vec{x}_0) =$$
$$= \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0) = u_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0) + u_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{x}_0) + \cdots + u_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}_0).$$

En el caso $n = 2$, $\vec{u} = (u_1, u_2)$ tal que $\|\vec{u}\| = 1$, se tiene que si θ es el ángulo que forma $\vec{u}$ con el eje positivo, entonces $u_1 = \cos\theta$; $u_2 = \operatorname{sen}\theta$. Por lo tanto

$$D_{\vec{u}}(f(\vec{x}_0) = \cos\theta \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0) + \operatorname{sen}\theta \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{x}_0).$$

Definición 5.2.19 Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en $\vec{x}_0 \in \mathring{A}$, entonces definimos el *gradiente de f en $\vec{x}_0$* por:

$$\text{grad} f(\vec{x}_0) = \nabla f(\vec{x}_0) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{x}_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}_0)\Big) = Df(\vec{x}_0).$$

Ponemos $\nabla f = \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\Big)$.

Observaciones 5.2.20

(1).- Indistintamente podemos consider el gradiente ó la diferencial de f (que son la misma cosa) como un vector en $\mathbb{R}^n$ ó como una transformación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$.

(2).- Con la notación que se dió, se tiene que

$$D_{\vec{u}} f(\vec{x}_0) \cdot \vec{u} = \nabla f(\vec{x}_0) \cdot \vec{u} = \langle \text{grad } f(\vec{x}_0), \vec{u} \rangle$$

es *la razón de cambio de f en la dirección $\vec{u}$.*

Como ejercicio, se probará que si $\|\vec{u}\| = 1$, entonces la máxima derivada direccional es en la dirección del gradiente.

Ahora sea $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^p$ y diferenciable en un punto $\vec{a} \in \mathring{D}$. El conjunto de puntos $\vec{x} \in D$ tales que $f(\vec{x}) = c$ y $\nabla f(\vec{x}) \neq \vec{0}$ se llama una *(hiper) superficie.*

Sea $x(t)$ una curva diferenciable, es decir $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ es diferenciable.

Decimos que la curva está sobre la superficie si $x(t) \in D$ y $f(x(t)) = c$ para toda $t \in \mathbb{R}$. Al derivar la relación $f(x(t)) = c$ obtenemos

$$0 = Df(x(t) \circ x'(t)) = \langle \nabla f(x(t)),\ x'(t) \rangle, \text{ donde } x'(t) = (x_1'(t), \ldots, x_p'(t)).$$

Sea $\vec{a}$ un punto de la superficie, y sea $x(t)$ una curva sobre la superficie que pasa por $\vec{a}$. Esto significa que $\vec{a} = x(t_0)$ para algún $t_0 \in \mathbb{R}$. Para este valor de t_0 obtenemos $\langle \nabla f(\vec{a}), x'(t_0) \rangle = 0$.

Así pues el vector $\nabla f(\vec{a})$ es perpendicular al vector tangente $x'(t_0)$ de la curva en el punto $\vec{a}$.

Esto es cierto para cualquier curva diferenciable sobre la superficie que pasa por el punto $\vec{a}$.

Es pues razonable definir el *(hiper) plano tangente* a la superficie en el punto $\vec{a}$ como aquel plano que pasa por $\vec{a}$ y que es perpendicular al vector $\nabla f(\vec{a})$. Esto solamente se aplica cuando $\nabla f(\vec{a}) \neq \vec{0}$; si $\nabla f(\vec{a}) = \vec{0}$ no definimos la noción de plano tangente.

Ahora nos proponemos encontrar tal plano tangente P. $\nabla f(\vec{a})$ es un vector anclado en el origen.

Decir que $\nabla f(\vec{a})$ es un vector normal al plano P que pasa por $\vec{a}$, es decir en realidad que $\nabla f(\vec{a})$ es normal al plano $P-\vec{a}$ el cual es "copia" de P pero que pasa por el origen.

Así pues $\vec{y} \in P \iff \vec{y}-\vec{a} \perp \nabla f(\vec{a}) \iff \langle \nabla f(\vec{a}), \vec{y}-\vec{a}\rangle = 0 \iff \langle \nabla f(\vec{a}), \vec{y}\rangle = \langle \nabla f(\vec{a}), \vec{a}\rangle$.

En otras palabras

$$P = \Big\{ \vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_p) | \langle \nabla f(\vec{a}), \vec{y}\rangle = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}) y_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_p}(\vec{a}) y_p = \langle \nabla f(\vec{a}), \vec{a}\rangle \Big\}.$$

(La figura ilustra el caso $n=2$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\vec{a} = (x_0, y_0) \in \mathring{A}$. En este caso el plano tangente es el de hecho una recta tangente).

Ejemplos 5.2.21

(1).- Hallemos el plano tangente a la superficie $x^2+y^2+z^2 = 3$ en el punto $(1,1,1)$. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la función $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$. Se tiene que $\nabla f(1,1,1) = (2,2,2) \neq \vec{0}$, por lo que la ecuación del plano tangente P a la superficie en el punto $(1,1,1)$ es:

$$2x+2y+2z = \langle \nabla f(1,1,1), (1,1,1)\rangle = \langle (2,2,2), (1,1,1)\rangle = 6.$$

(2).- Encontraremos el hiperplano tangente a la hipersuperfice: $x^2y+y^3 = 10$ en el punto $(1,2)$. (En este caso las palabras hipersuperfice e hiperplano tangente se traducen en curva y recta tangente respectivamente).

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función $f(x,y) = x^2y+y^3$. Se tiene $\nabla f(1,2) = (4,13) \neq \vec{0}$. La ecuación de la recta tangente R a la curva en el punto $(1,2)$ es:

$$4x+13y = \langle (4,13), (1,2)\rangle = 30.$$

(3).- Una superficie puede obtenerse al considerarse la gráfica de una función g de dos variables (en general de $n-1$ variables). En este caso la superficie está formada por aquellos (x,y,z) tales que $z = g(x,y)$ (en general $x_n = g(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$), esto es, $g(x,y)-z = 0$ (en general $g(x_1, \dots, x_{n-1}) - x_n = 0$). Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ($f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$) la función $f(x,y,z) = g(x,y)-z$ ($f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = g(x_1, \dots, x_{n-1}) - x_n$). El plano tangente P a la superficie en el punto $(a,b,g(a,b)) = \vec{a}$ ($(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, g(a_1, \dots, a_{n-1}) = \vec{a}$)

será:

$$P = \left\{(x,y,z)|\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{a})x + \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{a})y + \frac{\partial f}{\partial z}(\vec{a})z = \langle \nabla f(\vec{a}), \vec{a}\rangle\right\} =$$
$$= \left\{(x,y,z)|\frac{\partial g}{\partial x}(a,b) + \frac{\partial g}{\partial y}(a,b)y - z = \frac{\partial g}{\partial x}(a,b)a + \frac{\partial g}{\partial y}(a,b)b - g(a,b)\right\} =$$
$$= \left\{(x,y,z)|z = g(a,b) + \frac{\partial g}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial g}{\partial y}(a,b)(y-b)\right\} =$$
$$= \{(x,y,z)|z = g(a,b) + Dg(a,b)(x-a, y-b)\}.$$

$$\Bigg(\text{o} : P = \left\{(x_1,\ldots,x_n)|\sum^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a})x_i = \langle \nabla f(\vec{a}), \vec{a}\rangle\right\} =$$
$$= \Bigg\{(x_1,\ldots,x_n) \mid \sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial g}{\partial x_i}(a_1,\ldots,a_{n-1})x_i - x_n =$$
$$= \sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial g}{\partial x_i}(a_1,\ldots,a_{n-1})a_i - g(a_1,\ldots,a_{n-1})\Bigg\}$$
$$= \left\{(x_1,\ldots,x_n)|x_n = g(a_1,\ldots,a_{n-1}) + \sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial g}{\partial x_i}(a_1,\ldots,a_{n-1})(x_i - a_i)\right\} =$$
$$= \{(x_1,\ldots,x_n)|x_n = g(a_1,\ldots,a_{n-1}) +$$
$$+ Dg(a_1,\ldots,a_{n-1})(x_1-a_1, x_2-a_2,\ldots,x_{n-1}-a_{n-1})\}\Bigg).$$

que coincide con nuestra definición de plano tangente a la gráfica de g en el punto $(a,b,g(a,b))$ $((a_1,\ldots,a_{n-1},g(a_1,\ldots,a_{n-1})))$.

Teorema 5.2.22 (Valor Medio)

(1).- *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en A, donde A es un conjunto abierto. Sean $\vec{x},\vec{y} \in A$ tales que $[\vec{x},\vec{y}] = \{\vec{x}+t(\vec{y}-\vec{x}) \mid t \in [0,1]\} \subseteq A$. Entonces existe $\vec{c} \in (\vec{x},\vec{y}) = \{\vec{x}+t(\vec{y}-\vec{x}) \mid t \in (0,1)\}$ tal que $f(\vec{x}) - f(\vec{y}) = Df(\vec{c})(\vec{x}-\vec{y})$).*

(2).- *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciable en A, A un conjunto abierto. Sean $\vec{x},\vec{y} \in A$ tales que $[\vec{x},\vec{y}] \subseteq A$ y sea $f = (f_1,\ldots,f_m)$. Entonces existen $\vec{c}_1,\ldots,\vec{c}_m \in (\vec{x},\vec{y})$ tales que $f_j(\vec{x}) - f_j(\vec{y}) = Df_j(\vec{c}_j)(\vec{x}-\vec{y})$, $1 \leq j \leq m$.*

Demostración.

(1).- Sea $h : [0,1] \to \mathbb{R}$, dada por $h(t) = f(\vec{x}+t(\vec{y}-\vec{x}))$. Por ser h composición de funciones diferenciables, se sigue que h es una función diferenciable en $(0,1)$.

Además h es continua en $[0,1]$. Por el teorema del valor medio, se tiene que existe $t_0 \in (0,1)$ tal que $h(1) - h(0) = h'(t_0)(1-0) = h'(t_0)$.

Ahora, $h(1) = f(\vec{y})$, $h(0) = f(\vec{x})$. Sea $S : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ dada por $S(t) = \vec{x}+t(\vec{y}-\vec{x})$, $h = f \circ S$. Por lo tanto $h'(t_0) = f'(S(t_0) \cdot S'(t_0) = Df(S(t_0)) \cdot S'(t_0)$.

Ahora, $S = (s_1, \ldots, s_n)$, $s_j(t) = x_j + t(y_j - x_j)$, por lo que

$$S'(t) = \begin{pmatrix} s_1'(t) \\ \vdots \\ s_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 - x_1 \\ \vdots \\ y_n - x_n \end{pmatrix} = \vec{y} - \vec{x}$$

Si $\vec{c} = \vec{x} + t_0(\vec{y} - \vec{x}) \in (\vec{x}, \vec{y})$ se sigue que

$$f(\vec{y}) - f(\vec{x}) = Df(\vec{c})(\vec{y} - \vec{x}) = \langle Df(\vec{c}), \vec{y} - \vec{x} \rangle.$$

(2).- Se sigue de (1) pues $f = (f_1, \ldots, f_m)$ es diferenciable $\iff$ $f_1, \ldots, f_m$ son diferenciables y $f_j : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ para toda $1 \leq j \leq m$. ❑

Observación 5.2.23 Si $A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable en A, con A abierto en $\mathbb{R}^n$ y $\vec{x}, \vec{y} \in A$ son tales que $[\vec{x}, \vec{y}] \subseteq A$, entonces no necesariamente es cierto que exista $\vec{c} \in (\vec{x}, \vec{y})$ tal que $f(\vec{y}) - f(\vec{x}) = Df(\vec{c})(\vec{y}, \vec{x})$.

Ejemplo 5.2.24 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x) = (x^2, x^3)$. Se tiene que f es diferenciable en $\mathbb{R}$ y $Df(c) = \begin{pmatrix} 2c \\ 3c^2 \end{pmatrix}$. Ahora si existiese $c \in (0,1)$ tal que

$$f(1) - f(0) = Df(x) \cdot (1-0) \Rightarrow (1,1) - (0,0) = \begin{pmatrix} 2c \\ 3c^2 \end{pmatrix} \cdot 1.$$

Se tendría que $(1,1) = (2c, 3c^2)$ de tal forma que $c = \dfrac{1}{2}$ y $c = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ lo cual es absurdo.

5.3 Ejercicios

1) a) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Supongamos que existe $M > 0$ tal que $\|f(\vec{x})\| \leq M\|\vec{x}\|^2$ para toda $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Demostrar que f es derivable en $\vec{0}$ y que $Df(\vec{0}) = 0$ es la transformación lineal cero de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$.

   b) Sea f una función $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leq |x|$ para toda $x \in \mathbb{R}$. ¿Necesariamente tiene que ser f diferenciable en 0 y $Df(0) = 0$?

2) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{si} \quad (x,y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) \notin \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \end{cases}$$

Probar que f es diferenciable en $\vec{0}$ pero que no es diferenciable en ningún otro punto distinto de $\vec{0}$.

3) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$. ¿Es f diferenciable en 0?

Sugerencia: ¿Cómo sería la derivada en caso de que existiese?

4) Sea $S^1 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\vec{x}\| = 1\}$. Considerar una función continua $g : S^1 \to \mathbb{R}$ tal que $g(0,1) = g(1,0) = 0$ y $g(-\vec{x}) = -g(\vec{x})$ para toda $\vec{x} \in S^1$. Se define $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ como

$$f(\vec{x}) = \begin{cases} \|\vec{x}\| g\Big(\dfrac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}\Big) & , \quad \vec{x} \neq \vec{0} \\ 0 & , \quad \vec{x} = \vec{0} \end{cases}$$

a) Tomar $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ y sea $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función $h(t) = f(t\vec{x})$ para toda $t \in \mathbb{R}$. Probar que h es derivable en $\mathbb{R}$.

b) Demostrar que f es diferenciable en $\vec{0}$ solamente en el caso de que g sea la función 0

Sugerencia: La misma del Ejericio 3.

5) Considerar la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(\vec{x}) = (x_1 x_2, x_2^2)$ para toda $\vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Usando la definición de derivada probar que f es diferenciable en todo punto de $\mathbb{R}^2$.

Sugerencia ¿Como tiene que estar dada $Df(\vec{a})$?

6) Sea D un subgrupo de $\mathbb{R}^p$ y sea $f : D \to \mathbb{R}^q$. Consideremos en $\mathbb{R}^p$ la norma euclideana $\| \ \|_p$ y cualquier otra norma $\mathcal{N}_p$ y en $\mathbb{R}^q$ la norma euclidena $\| \ \|_q$ y cualquier otra norma $\mathcal{N}_q$. Probar que $\vec{a}$ es punto interior de D con respecto a $\| \ \|_p \iff \vec{a}$ es punto interior de D con respecto a $\mathcal{N}_p$.

Se dirá que f es diferenciable en $\vec{a}$ con respecto a las normas $\mathcal{N}_p$, $\mathcal{N}_q$ si existe una transformación lineal $L : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ tal que para toda $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\vec{x} \in D$, $0 < \mathcal{N}_p(\vec{x} - \vec{a}) < \delta$ entonces $\dfrac{\mathcal{N}_q(f(\vec{x}) - f(\vec{a}) - L(\vec{x} - \vec{a}))}{\mathcal{N}_p(\vec{x} - \vec{a})} < \varepsilon$.

Demostrar que f es diferenciable con respecto a las normas $\mathcal{N}_p$, $\mathcal{N}_q \iff f$ es diferenciable en $\vec{a}$ con respecto a las normas $\| \ \|_p$ y $\| \ \|_q$.

7) Sea $P : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la función $P(\vec{x}, \vec{y}) := \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$.

a) Encontrar $DP(\vec{a}, \vec{b})$.

b) Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ funciones diferenciable y $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función $h(t) = \langle f(t), g(t)\rangle$. Demostrar que $h'(a) = \langle (f'(a))^T, g(a)\rangle + \langle f(a), (g'(a))^T\rangle$.

c) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una función diferenciable tal que $|f(t)| = 1$ para toda t. Probar que $\langle (f'(t)^T, f(t)\rangle = 0$.

8) Considerar una función diferenciable $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que posee una función inversa diferenciable $f^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Probar que $D(f^{-1})(\vec{a}) = [Df(f^{-1}(\vec{a}))]^{-1}$.

9) Sean $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal y $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que $\|g(\vec{x})\| \leq M\|\vec{x}\|^2$. Sea $f(\vec{x}) = L(\vec{x}) + g(\vec{x})$ para toda $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Demostrar que $Df(\vec{0}) = L$.

10) Calcular las derivadas parciales de las siguientes funciones:

a) $f(x, y) = \ln \operatorname{sen} \dfrac{x + a}{\sqrt{y}}$;

b) $f(x, y, z) = z^{xy}$;

c) $f(x, y, z) = x^{y/z}$;

d) $f(x, y) = \dfrac{1}{\arctan y/x}$;

e) $f(x, y, z) = x^{y^z}$;

f) $f(x, y, z) = (x + y)^z$.

11) Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Calcular las derivadas parciales de f si:

a) $f(x, y) = \int_a^{x+y} g$;

b) $f(x, y, z) = \int_{xy}^{\operatorname{sen}(x\cdot(\operatorname{sen}(y\cdot \operatorname{sen} z)))} g$;

c) $f(x, y) = \int_a^{x\cdot y} g$;

d) $f(x, y) = \displaystyle\int_a^{x^2 \int_b^y g} g$.

12) Considerar la función:

$$f(x, y) = x^{x^{x^{x^y}}} + \ln x(\arctan(\arctan(\arctan(\operatorname{sen}(\cos(xy) - \ln(x + y)))))).$$

Calcular $D_2 f(1, y)$.

13) Considerar la función

$$f(x, y) = y^{e^{(x^2-1)^4 - 1}} - \operatorname{sen}[(e^{\operatorname{sen}(x^2+\cos 2x)})(1 - y)x].$$

Encontrar $D_1 f(0, 1)$ y $D_2 f(0, 1)$.

14) Encontrar las derivadas de f por medio de las derivadas de g y h si:

   a) $f(x,y) = g(x)$;
   b) $f(x,y) = g(y)$;
   c) $f(x,y) = g(x+y)$;
   d) $f(x,y) = g(x)h(y)$;
   e) $f(x,y) = g(x)^{h(y)}$;
   f) $f(x,y) = g(x^2+y^2)$.

15) a) Probar que si $z = xy + xe^{y/x}$, entonces $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = xy + z$.

   b) Demostrar que si $u = (x-y)(y-z)(z-x)$, entonces $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial y}{\partial z} = 0$.

16) a) Se supone que $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x}{x^2+y^2}$. Calcular $z = z(x,y)$.

   b) Suponer que $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{x^2+y^2}{x}$ y que $z(1,y) = \operatorname{sen} y$. Encontrar $z = z(x,y)$.

17) Sea $z = \log_y(x)$. Calcular $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

18) Sean $g_1, g_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funciones continuas. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \int_0^x g_1(t,0)dt + \int_0^y g_2(x,t)dt.$$

   Probar que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = g_2(x,y)$.

19) Demostrar que las siguientes funciones son derivables y calcular su derivada en cualquier punto.

   a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y) = (e^y, \operatorname{sen} xy, x^2 + 2y^3)$.
   b) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z,\omega) = (xyz\omega^2, e^{\operatorname{sen}\omega}, x^2)$.
   c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y,z) = \int_a^{\left[x \int_b^{\left[y \int_c^z g\right]} g\right]} g$$

20) Sea $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ una función diferenciable en $\vec{a} \in \mathbb{R}^p$. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^q$ la función $g(t) := f(\vec{a} + t\vec{h})$, donde $\vec{h}$ es un vector en $\mathbb{R}^p$. Demostrar que $g'(0) = Df(\vec{a})(\vec{h})$.

21) Sea $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ y sea $f : D \to \mathbb{R}^2$ la función $f(x, y) = \left(xy, \dfrac{y}{x}\right)$ para toda $(x, y) \in D$. Demostrar que f es diferenciable en todo punto de su dominio.

Si $(a, b) \in D$, calcular la matriz de $Df(a, b)$ con respecto a la base canónica $\{(1, 0), (1, 1)\}$ de $\mathbb{R}^2$.

22) Considerar la función

a) $f(x, y) = (\operatorname{sen}(xy), \cos(xy), x^2y^2)$;
b) $f(x, y, z) = (z^{xy}, x^z, \tan(xyz))$.

¿Cual es el dominio de f? Probar que f es diferenciable en todo punto de su dominio y calcular su matriz jacobiana.

23) Sea $f : D \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x, y, z) = \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Encontrar el dominio D de f. Probar que f es diferenciable en el punto $(3, 4, 5)$ y calcular $Df(3, 4, 5)(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$.

24) Encontrar la ecuación del plano tangente a la superficie S dada por la gráfica de la función

a) $z = x^2 + y^2$ en el punto $(0, 0, 0)$;
b) $z = (x + y)^2$ en el punto $(3, 2, 25)$;
c) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + (x^2 + y^2)$ en $(1, 0, 2)$;
d) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 2xy - y^2 + 1}$ en el punto $(1, 1, \sqrt{3})$.

25) Calcular aproximadamente las siguientes cantidades:

a) $\ln(\sqrt[3]{1.1} + \sqrt[4]{0.98} - 1)$;
b) $(1.04)^{2.02}$;
c) $\sqrt{(4.05)^2 + (2.93)^2}$.

26) Una caja cerrada, cuyas dimensiones exteriores son del 10cm, 8cm y 6cm, está construída por láminas de oro de 2mm de espesor.

Calcular el volumen aproximado del material que se gastó en hacer la caja.

27) a) Calcular $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ si $z = \arctan \dfrac{y}{x}$. Cuando $y = x^2$ hallar $\dfrac{dz}{dx}$.

b) Calcular $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ si $z = x^y$ y cuando $y = \varphi(x)$ encontrar $\dfrac{dz}{dx}$.

28) a) Encontrar $\dfrac{dz}{dt}$ para $z = \dfrac{x}{y}$, donde $x = e^t$, $y = \ln t$.

b) Encontrar $\dfrac{du}{dt}$ para $u = e^{x-2y}$, donde $x = \operatorname{sen} t$, $y = t^3$.

29) Verificar la regla de la cadena para $f(u,v,\omega) = u^2v + \omega v^2$, donde $u = xy$, $v = \operatorname{sen} x$, $\omega = e^x$.

30) Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x,y) = f(xy)$. Probar que $x\dfrac{\partial F}{\partial x} = y\dfrac{\partial F}{\partial y}$.

31) Calcular $Dh(x,y,z)$ si $h(x,y,z) = f(u(x,y,z), v(x,y), \omega(y,z))$.

32) Considerar las funciones $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}$ dadas por

a) $F(x,y) = f(g(x)k(y), g(x) + k(y))$, donde $g, k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
b) $F(x,y,z) = f(g(x+y), h(x+y))$, donde $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
c) $F(x,y,z) = f(x^y, y^z, z^y)$.
d) $F(x,y) = f(x, g(x), h(x,y))$, donde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Encontrar las derivadas parciales de F.

33) Sea $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que f es *homogenea de grado* m si para toda $\vec{x} \in \mathbb{R}^p$ y para toda $t \in \mathbb{R}$ se tiene

$$f(t\vec{x}) = t^m f(\vec{x}). \qquad (*)$$

Probar que si f es diferenciable, entonces $Df(\vec{x})(\vec{x}) = mf(\vec{x})$, es decir

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}) = mf(\vec{x}).$$

Sugerencia: Derivar $(*)$ y hacer $t = 1$.

34) Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funciones diferenciables. Se supone que $F(x, f(x)) = 0$ y que $\dfrac{\partial F}{\partial y} \neq 0$. Probar que $f'(x) = -\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)}$, donde $y = f(x)$.

35) Utilizando el Ejercicio 34, hallar $\dfrac{dy}{dx}$, donde:

a) $x^3y - y^3x = a^4$;

b) $\operatorname{sen} xy - e^{xy} - xy = 0$;

c) $\arctan \dfrac{x+y}{a} - \dfrac{y}{a} = 0$;

d) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$;

e) $y^x = x^y$.

36) Considerar la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x^2 - xy - 2y^2$.

Encontrar la derivada direccional de f en el punto $(1,2)$ y en dirección que forma con el eje x positivo un ángulo de $60°$.

37) Considerar la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x^3 - 2x^2y + xy^2 + 1$. Encontrar la derivada de f en el punto $(1,2)$ en la dirección que va desde este punto al punto $(4,6)$.

38) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función dada en el Ejercicio 4 con $g \neq 0$. Demostrar que no necesariamente es cierto que $D_{\vec{u}+\vec{v}}f(\vec{0}) = D_{\vec{u}}f(\vec{0}) + D_{\vec{v}}f(\vec{0})$.

39) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^3 - y^2} & \text{si} \quad x^3 \neq y^2 \\ 0 & \text{si} \quad x^3 = y^2 \end{cases}$. Demostrar que f tiene derivada en $\vec{0}$ en cualquier dirección pero que f no es continua en $\vec{0}$.

40) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

Demostrar que f es continua en $\vec{0}$ y que tiene todas sus derivadas direccionales en $(0,0)$ pero que f no es diferenciable en $\vec{0}$.

41) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{y} & \text{si} \quad y \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad y = 0 \end{cases}$.

Probar que $D_1f(\vec{0})$ y $D_2f(\vec{0})$ existen pero que si $\vec{u} = (\alpha, \beta)$ con $\alpha\beta \neq 0$, entonces $D_{\vec{u}}f(\vec{0})$ no existe.

42) Sean $f, g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$. Demostrar que $\nabla(f \cdot g) = f(\nabla g) + g(\nabla f)$.

43) Sea $D \subseteq \mathbb{R}^p$ y sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en $\vec{a} \in \overset{\circ}{D}$ tal que $Df(\vec{a}) \neq 0$. Haciendo variar $\vec{u}$ entre todos los vectores unitarios de $\mathbb{R}^p$, demostrar que:

a) $D_{\vec{u}}f(\vec{a})$ es máximo $\iff \vec{u} = \dfrac{\nabla f(\vec{a})}{\|\nabla f(\vec{a})\|}$.

b) $D_{\vec{u}}f(\vec{a})$ es mínimo $\iff \vec{u} = -\dfrac{\nabla f(\vec{a})}{\|\nabla f(\vec{a})\|}$.

44) Una distribución de temperatura en el espacio está dada por la función: $f(x,y) = 10 + 6\cos x \cos y + 3\cos 2x + 4\cos 3y$.

En el punto $\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right)$, encontrar la dirección de mayor crecimiento de temperatura y la dirección de mayor decrecimiento de temperatura.

45) a) Encontrar la ecuación del plano tangente a la superficie $x = e^{2y-z}$ en $(1,1,2)$ y un vector normal a este plano.

b) Sea $f(x,y,z) = z - e^x \operatorname{sen} y$ y sea $\vec{a} = \left(\ln 3, \dfrac{3}{2}\pi, -3\right)$. Calcular el valor c tal que $\vec{a}$ pertenezca a la superficie $f(x,y,z) = c$. Encontrar el plano tangente a esta superficie en $\vec{a}$.

c) Sea $f(x,y) = \dfrac{x}{(x^2+y^2)^{1/2}}$. Encontrar la ecuación del plano tangente a la superfice $f(x,y) = z$ en el punto $\left(3, -4, \dfrac{3}{5}\right)$.

46) Sea $f : A \to \mathbb{R}^q$, donde A es un conjunto abierto conexo de $\mathbb{R}^p$. Se supone que $Df(\vec{x}) = 0$ para toda $\vec{x} \in A$. Probar que f es constante.

47) a) Sea $f : A \to \mathbb{R}$, donde A es un convexo en $\mathbb{R}^p$, una función diferenciable tal que $\|\nabla f(\vec{x})\| \leq M$ para toda $\vec{x} \in A$. Demostrar que $|f(\vec{x}) - f(\vec{y})| \leq M\|\vec{x} - \vec{y}\|$ para toda $\vec{x}$, $\vec{y} \in A$.

b) Dar un contraejemplo al inciso a) cuando A no es convexo.

48) Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y sea $(x_0, y_0) \in \mathring{A}$. Supongamos que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ existe en un conjunto abierto que contiene a (x_0, y_0), $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ es continua en (x_0, y_0) y que $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existe en (x_0, y_0). Probar que f es diferenciable en (x_0, y_0).

Capítulo 6

Teorema de Taylor

6.1 Derivadas de orden superior

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y sea f una función $f : A \to \mathbb{R}^m$. Supongamos que para toda $\vec{x}_0 \in A$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0)$ existe. En este caso obtenemos una función $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} \colon A \to \mathbb{R}^m$. Por tanto tiene sentido definir $\dfrac{\partial}{\partial x_j}(\dfrac{\partial f}{\partial x_i})(\vec{x}_0) =: \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\vec{x}_0)$ y así sucesivamente.

En general: $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}, \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_k}} = f_{x_{i_1} \cdots x_{i_k}}$ significa $\dfrac{\partial}{\partial x_{i_1}}\left(\dfrac{\partial}{\partial x_{i_2}}\left(\cdots\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_{i_k}}\right)\cdots\right)\right)$. En particular: $f_x = \dfrac{\partial f}{\partial x}$; $f_{xy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, etc.

Ejemplo 6.1.1 Sea $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = x^3 y (\operatorname{sen} z) e^{xz}$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= 3x^2 y (\operatorname{sen} z) e^{xz} + z x^3 y (\operatorname{sen} z) e^{xz}, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) &= 3x^2 y (\operatorname{sen} z) e^{xz} + z x^3 (\operatorname{sen} z) e^{xz}, \\
\frac{\partial^3 f}{\partial x d y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) &= 6x (\operatorname{sen} z) e^{xz} + 3zx^2 (\operatorname{sen} z) e^{xz} + 3zx^2 (\operatorname{sen} z) e^{xz} + \\
&\quad + z^2 x^3 (\operatorname{sen} z) e^{xz}, \\
\frac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) &= 3x^2 (\cos z) e^{xz} + 3x^3 (\operatorname{sen} z) e^{xz} + x^3 (\operatorname{sen} z) e^{xz} + \\
&\quad + z x^3 (\cos z) e^{xz} + z x^4 (\operatorname{sen} z) e^{ez}.
\end{aligned}$$

Por otro lado tenemos que $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x^3 (\operatorname{sen} z) e^{xz}$, lo cual implica que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 3x^2 (\operatorname{sen} z) e^{xz} + x^3 z (\operatorname{sen} z) e^{xz} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Observación 6.1.2 En general $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\vec{x}_0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\vec{x}_0)$ $\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}_0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\vec{x}_0)\right)$.

Ejemplo 6.1.3 Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

Para toda $(x,y) \neq (0,0)$ se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{(3x^2y - y^3)(x^2+y^2) - 2x^2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{(x^3 - 3xy^2)(x^2+y^2) - 2xy^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}. \end{aligned}$$

Ahora bien

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,t) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{-t^5}{t(t^4)} = -1;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(t,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{t^5}{t(t^4)} = 1.$$

De donde se sigue que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1 \neq -1 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0).$$

Teorema 6.1.4 *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $f \colon A \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in \mathring{A}$. Supongamos que $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ existen en una vecindad abierta U de (x_0,y_0) y que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ es continua en (x_0,y_0). Entonces $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ existe en (x_0,y_0) y se tiene: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0)$.*

Demostración. Sea $\delta > 0$ tal que $B((x_0,y_0),\delta) \subseteq U \subseteq A$. Sea $V = B((0,0),\delta)$.

Sea $g : V \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(h,k) = \{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0)\} - \{f(x_0, y_0+k) - f(x_0,y_0)\}.$$

Se va a probar que $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{g(h,k)}{hk} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$.

Sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe $\eta > 0$ tal que $\eta \leq \dfrac{\delta}{\sqrt{2}}$ y sean $|h| < \eta$, $|k| < \eta$. Por lo tanto $\|(h,k)\| = \sqrt{h^2 + k^2} < \sqrt{2}\eta \leq \delta$, lo cual implica que $(h,k) \in V$. Se tiene, por la continuidad de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$ en (x_0, y_0), que

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + h, y_0 + k) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) \right| < \varepsilon.$$

Para $|k| < \eta$, definimos $\ell \colon W \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $W = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < \eta\}$, por $\ell(h) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0)$.

Puesto que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ existe en U se tiene que ℓ es diferenciable en W.

Ahora

$$\ell(h) - \ell(0) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - \{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)\} = g(h,k).$$

Por el teorema del valor medio en $\mathbb{R}$, existe $h_0 \in W$ con $0 < |h_0| < |h|$ (h_0 depende de k) tal que:

$$\ell(h) - \ell(0) = \ell'(h_0) \cdot (h - 0) = \ell'(h_0) \cdot h = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + h_0, y_0 + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + h_0, y_0) \right\} \cdot h.$$

Ahora, puesto que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$ existe en U, se tiene que la función $p(k) = \left\{ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0 + h_0, y_0 + k) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0 + h_0, y_0) \right\}$ es diferenciable y aplicando otra vez el teorema del valor medio tenemos que existe k_0 con $0 < |k_0| < |k|$ tal que:

$$p(k) - p(0) = p'(k_0)(k - 0) = p'(k_0)k \quad (p(0) = 0)$$

lo cual implica que $\ell'(h_0) = p'(k_0)k$.

Se sigue que

$$g(h,k) = \ell(h) - \ell(0) = h\ell'(h_0) = hkp'(k_0) = hk\left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + h_0, y_0 + k_0) \right\}.$$

Por lo tanto $\dfrac{g(h,k)}{hk} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + h_0, y_0 + k_0)$ con $0 < |h_0| < |h|$ y $0 < |k_0| < |k|$.

Se obtiene que $\left| \dfrac{g(h,k)}{hk} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \right| < \varepsilon$. Por lo tanto

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{g(h,k)}{hk} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0).$$

Ahora

$$\lim_{k\to 0}\frac{g(h,k)}{hk}=\lim_{k\to 0}\left\{\frac{1}{kh}\Big[\{f(x_0+h,y_0+k)-\right.$$

$$\left.-f(x_0+h,y_0)\}-\{f(x_0,y_0+k)-f(x_0,y_0)\}\Big]\right\}=$$

$$=\frac{1}{h}\left\{\lim_{k\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0+h,y_0)}{k}-\right.$$

$$\left.-\lim_{k\to 0}\frac{f(x_0,y_0+k)-f(x_0,y_0)}{k}\right\}=$$

$$=\frac{1}{h}\left\{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+h,y_0)-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right\}.$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+h,y_0)-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\lim_{k\to 0}\left(\frac{g(h,k)}{hk}\right)\right)=$$

$$=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{g(h,k)}{hk}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0).$$

De donde se obtiene

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0).$$

❏

Corolario 6.1.5 *Sean* $A\subseteq\mathbb{R}^n$, $\vec{x}_0\in\mathring{A}$ *y* $f\colon A\to\mathbb{R}$. *Si* $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x})$, $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x})$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(\vec{x})$ *existen en un abierto* U *tal que* $\vec{x}_0\in U\subseteq A$ *y* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}$ *es continua en* $\vec{x}_0$, *entonces* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(\vec{x}_0)$ *existe y* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(\vec{x}_0)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(\vec{x}_0)$.

Demostración. Pongamos $i<j$ y sean $B\subseteq\mathbb{R}^2$, $g:B\to\mathbb{R}$ dada por: $g(x,y)=f(x_1^{(0)},\ldots,x_{i-1}^{(0)},x,x_{i+1}^{(0)},\ldots,x_{j-1}^{(0)},y,x_{j+1}^{(0)},\ldots,x_n^{(0)})$. Se tiene que $(x_0,y_0)\in B^\circ$, $\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $\frac{\partial g}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial x_j}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}$ $(x_0=x_i^{(0)},y_0=x_j^{(0)})$.

Aplicando el teorema anterior a g, se tiene que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(\vec{x}_0)=\frac{\partial^2 g}{\partial y\partial x}(x_0,y_0)$$

existe y

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\vec{x}_0) = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}_0). \qquad \square$$

Corolario 6.1.6 *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que todas las derivadas parciales de f de orden q existen en un abierto U tal que $\vec{x}_0 \in U \subseteq A$ y además las parciales de orden $(q+1)$ son continuas en $\vec{x}_0$. Entonces cualquier permutación en el orden de la derivación nos da el mismo resultado (para derivadas de orden q).*

Demostración. Se aplica el Corolario 6.1.5 a las funciones del tipo $\dfrac{\partial^q f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_q}}$. Más formalmente si σ es una permutación de q–elementos, es decir $\sigma : \{1, 2, \ldots, q\} \to \{1, 2, \ldots, q\}$ es una función biyectiva, entonces σ es la composición de transposiciones que permutan dos índices consecutivos, es decir, permutaciones que sólo cambian dos elementos consecutivos (por ejemplo, $\sigma(k) = k+1$, $\sigma(k+1) = k$ y $\sigma(u) = u$ para toda $u \in \{1, 2, \ldots, q\} \setminus \{k, k+1\}$). Por lo tanto, si se demuestra el enunciado para una transposición de este tipo, se probará lo deseado. Se tiene:

$$\frac{\partial^q f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_k} \partial x_{i_{k+1}} \cdots \partial x_{i_q}} = \frac{\partial^{k-1}}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_{k-1}}} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k+1}}} \left(\frac{\partial^{q-k-1} f}{\partial x_{i_{k+1}} \cdots \partial x_{i_q}} \right) \right) =$$

$$= \frac{\partial^{k-1}}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_{k-1}}} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_{i_{k+1}} \partial x_{i_k}} \left(\frac{\partial^{q-k-1} f}{\partial x_{i_{k+1}} \cdots \partial x_{i_q}} \right) \right) = \frac{\partial^q f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_{k+1}} \partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_q}}. \qquad \square$$

Pasamos ahora a definir las derivadas de orden superior de una función de varias variables. Este concepto presenta varias dificultades, tanto técnicas como teóricas, por lo que, aunque no es necesario que el lector de demasiada importancia de desarrollo técnico que aquí presentamos, consideramos importante que se de una leída cuidados a los resultados presentados pues éstos le serán de mucha utilidad para otros conceptos.

Denotamos $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) := \{T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \mid T \text{ es lineal}\}$.

Se tiene que, como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \cong \mathbb{R}^{nm}$.

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$, A un conjunto abierto y sea $f : A \to \mathbb{R}^m$ una función diferenciable. Entonces para cada $\vec{x}_0 \in A$, $Df(\vec{x}_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, es decir tenemos una función

$$\begin{aligned} Df : A &\to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \cong \mathbb{R}^{nm} \\ \vec{x}_0 &\mapsto Df(\vec{x}_0) \end{aligned}$$

Esta función se llama la *diferencial* ó *derivada* de f.

Ahora si $g = Df : A \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ es una función diferenciable en A (como función de A en $\mathbb{R}^{nm} \cong \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$), entonces $Dg(\vec{x}_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)) \cong \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{nm}) \cong \mathbb{R}^{n^2 m}$.

Ponemos $Dg(\vec{x}_0) = D^2 f(\vec{x}_0)$ y se tiene: $D^2 f : A \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$.

Si $D^2 f$ es diferenciable se tendrá $D(D^2 f)(\vec{x}_0) =: D^3 f(\vec{x}_0)$ que será un elemento de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))) \cong \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n^2 m}) \cong \mathbb{R}^{n^3 m}$.

En general, $D^k f : A \to \mathbb{R}^{n^k m}$ con la identificación:

$$\underbrace{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\ldots, \mathcal{L}}_{k-\text{veces}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)\ldots))) \cong \mathbb{R}^{n^k m}.$$

A $D^k f$ se le llama la *k–ésima derivada de f*.

Trabajar con derivadas mayores que uno tal como lo hemos expuesto hasta ahora resulta demasiado complicado y lo que trataremos de hacer ahora es desglosar de manera más explícita que es $D^k f$.

Sea $\vec{x}_0 \in A$ fijo, entonces $D^2 f(\vec{x}_0)$ se puede considerar una función *bilineal* $B_{x_0} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ de la siguiente forma. Sean $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, $B_{\vec{x}_0}(\vec{x}, \vec{y}) := (D^2 f(\vec{x}_0)(\vec{x}))(\vec{y})$. Esto tiene sentido ya que puesto que $D^2 f(\vec{x}_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$, se tiene $D^2 f(\vec{x}_0)(\vec{x}) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, es decir, $D^2 f(\vec{x}_0)(\vec{x})$ es una transformación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ y por tanto $(D^2 f(\vec{x}_0)(\vec{x}))(\vec{y}) \in \mathbb{R}^m$.

Ahora bien $B_{\vec{x}_0}(\vec{x}, \vec{y})$ es una función bilineal. En efecto, sean $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \mathbb{R}^n$, α, $\beta \in \mathbb{R}$, $D^2 f(\vec{x}_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$. Por lo tanto $D^2 f(\vec{x}_0)(\alpha\vec{x}_1 + \beta\vec{x}_2) = \alpha(D^2 f(\vec{x}_0))(\vec{x}_1) + \beta(D^2 f(\vec{x}_0))(\vec{x}_2)$. Se sigue que:

$$B_{\vec{x}_0}(\alpha\vec{x}_1 + \beta\vec{x}_2, \vec{y}) = \alpha B_{\vec{x}_0}(\vec{x}_1, \vec{y}) + \beta B_{\vec{x}_0}(\vec{x}_2, \vec{y}).$$

Ahora si $\vec{y}_1, \vec{y}_2 \in \mathbb{R}^n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces $(D^2 f(\vec{x}_0))(\vec{x}) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, por lo que $((D^2 f(\vec{x}_0))(\vec{x}))(\alpha\vec{y}_1 + \beta\vec{y}_2) = \alpha(D^2 f(\vec{x}_0)(\vec{x}))(\vec{y}_1) + \beta(D^2 f(\vec{x}_0)(\vec{x}))(\vec{y}_2)$. Se sigue que:

$$B_{\vec{x}_0}(\vec{x}, \alpha\vec{y}_1 + \beta\vec{y}_2) = \alpha B_{\vec{x}_0}(\vec{x}, \vec{y}_1) + \beta B_{\vec{x}_0}(\vec{x}, \vec{y}_2).$$

Por lo tanto $D^2 f : A \to B(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = \{H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \mid H \text{ es bilineal}\}$.

Generalizamos todo lo anterior.

Definición 6.1.7 Si $E_1, \ldots, E_r$, F son espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$, entonces una función $f : E_1 \times \cdots \times E_r \to F$ se llama *r–lineal* (ó *multilineal*) si

$$f(\vec{x}_1, \ldots, a\vec{x}_i + b\vec{y}_i, \ldots, \vec{x}_r) = af(\vec{x}_1, \ldots \vec{x}_i, \ldots, \vec{x}_r) + bf(\vec{x}_1, \ldots, \vec{y}_i, \ldots, \vec{x}_r)$$

para $\vec{x}_1 \in E_1, \ldots, \vec{x}_i, \vec{y}_i \in E_i, \ldots, \vec{x}_r \in E_r$, $a, b \in \mathbb{R}$ y para toda $1 \leq i \leq r$. Es decir f es lineal en cada entrada. Al espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ formado por todas las funciones r–lineales de $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_r$ en F se le denota por $B_r(E_1 \times \cdots \times E_r; F)$. Claramente este es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Teorema 6.1.8 *Como espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$, se tiene que:*

$$B_r(E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_r; F) \cong \mathcal{L}(E_1, \mathcal{L}(E_2, \ldots, \mathcal{L}(E_r, F)\cdots)).$$

<u>*Demostración*</u>. Primero demostraremos que:

$$B_r(E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_r; F) \cong \mathcal{L}(E_1, B_{r-1}(E_2 \times \cdots \times E_r; F)).$$

Sea $f \in B_r(E_1 \times \cdots \times E_r; F)$. Para cada $\vec{x} \in E_1$, sea $g_{\vec{x}} : E_2 \times \cdots \times E_r \to F$ dada por $g_{\vec{x}}(\vec{y}) = f(\vec{x}, \vec{y})$, donde $\vec{y} = (\vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_r) \in E_2 \times \cdots \times E_r$.

Claramente $g_{\vec{x}} \in B_{r-1}(E_2 \times \cdots \times E_r; F)$, pues $f \in B_r(E_1 \times \cdots \times E_r; F)$.

Sea ahora $h : E_1 \to B_{r-1}(E_2 \times \cdots \times E_r; F)$ dada por $h(\vec{x}) = g_{\vec{x}}$. Se tiene que h es lineal y por tanto se ha definido una transformación linear

$$\varphi : B_r(E_1 \times \cdots \times E_r; F) \to \mathcal{L}(E_1; B_{r-1}(E_2 \times \cdots \times E_r; F))$$

dada por $\varphi(f) = h$.

Recíprocamente, dada $p \in \mathcal{L}(E_1; B_{r-1}(E_2 \times \cdots \times E_r; F))$, definimos

$$\ell : E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_r \to F$$

por $\ell(\vec{x}, \vec{y}) = p(\vec{x})(\vec{y})$, donde $\vec{x} \in E_1, \vec{y} = (\vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_r) \in E_2 \times \cdots \times E_r$. Claramente ℓ es r-lineal y por tanto hemos definido la transformación lineal:

$$\psi : \mathcal{L}(E_1, B_{r-1}(E_2 \times \cdots \times E_r; F)) \to B_r(E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_r; F) \text{ por } \psi(p) = \ell.$$

Ahora, es fácil verificar que ψ y φ son funciones inversas y por tanto

$$B(E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_r; F) \cong \mathcal{L}(E_1, B_{r-1}(E_2 \times \cdots \times E_r; F)).$$

Demostramos el teorema por inducción en r.

Si $r = 1$, $B_1(E_1; F) = \mathcal{L}(E_1, F)$.

Si $r = 2$, $B_2(E_1 \times E_2; F) \cong \mathcal{L}(E_1, B_1(E_2; F)) = \mathcal{L}(E_1, \mathcal{L}(E_2, F))$.

Suponemos que $B_{r-1}(E_2 \times \cdots \times E_r; F) \cong \mathcal{L}(E_2, \mathcal{L}(E_3, \ldots, \mathcal{L}(E_r; F) \cdots))$.

Ahora para r:

$$\begin{aligned} B_r(E_1 \times \cdots \times E_r; F) &\cong \mathcal{L}(E_1, B_{r-1}(E_2 \times \cdots \times E_r; F)) \cong \\ &\cong \mathcal{L}(E_1, \mathcal{L}(E_2, \ldots, \mathcal{L}(E_r, F) \cdots)). \end{aligned}$$ ❏

Ya con este teorema, tendremos que si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto y $f : A \to \mathbb{R}^m$, entonces si f es k–veces derivable se tendrá:

$$\begin{aligned} Df : A &\to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{R}^m), \\ D^2 f : A &\to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)) \cong B_2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m), \\ D^3 f : A &\to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m))) \cong B_3(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ D^k f : A &\to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \ldots, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m) \cdots)) \cong B_k(\underbrace{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{k-\text{veces}}; \mathbb{R}^m). \end{aligned}$$

Además $\dim B_k(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m) = \dim \mathbb{R}^{n^k \cdot m} = n^k \cdot m$.

Consideremos el caso $m = 1 : \dim B_k(\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}) = n^k$.

Sea $\{dx_1, dx_2, \ldots, dx_n\}$ la base de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = (\mathbb{R}^n)^* \cong \mathbb{R}^n$ dada por:

$$dx_i(\vec{a}) = dx_i(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n) = a_i = \pi_i(\vec{a}) = \text{ la proyección } i\text{–ésima},$$

$1 \leq i \leq n$. Se tiene que $\{dx_i\}_{i=1}^n$ es la base dual de la base canónica $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^n$ de $\mathbb{R}^n$. Sea $\varphi \colon \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n$, la cual es una función lineal y $\varphi(dx_i) = \vec{e}_i$. Entonces φ es un isomorfismo entre $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ y $\mathbb{R}^n$.

Ahora, en el caso general, si $g : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable y $Dg : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ entonces $Dg(\vec{x}_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ y

$$Dg(\vec{x}_0)(\vec{y}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\vec{x}_0) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(\vec{x}_0) & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_1}{\partial x_i}(\vec{x}_0) y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_m}{\partial x_i}(\vec{x}_0) y_i \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial x_i}(\vec{x}_0) y_i \vec{E}_j,$$

donde $\{\vec{E}_j\}_{j=1}^m$ es la base canónica de $\mathbb{R}^m$.

Por lo tanto, si $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $Df : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, entonces, por lo anterior, se tiene $Df(\vec{x}_0) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0) dx_i =: g$. La componente j–ésima de g la denotamos por g_j y se tiene $g_j = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0)$.

Ahora, $Dg = D^2 f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})) \cong B_2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$,

$$D^2 f(\vec{x}_0)(\vec{y}) = Dg(\vec{x}_0)(\vec{y}) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(\vec{x}_0) y_i dx_j$$

por lo que

$$Dg(\vec{x}_0)(\vec{y})(\vec{z}) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}_0) y_i dx_j(\vec{z}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}_0) y_i z_j.$$

Ahora definimos $dx_i \wedge dx_j : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(1 \leq i, j \leq n)$ por $(dx_i \wedge dx_j)(\vec{y}, \vec{z}) = y_i z_j$ y por tanto se tiene que:

$$D^2 f(\vec{x}_0) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}_0) dx_i \wedge dx_j.$$

Se tiene que $\{dx_i \wedge dx_j \mid 1 \leq i,j \leq n\}$ es base canónica de $B_2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$.

Para continuar desarrollando las derivadas, pongamos $g = D^2 f$ y $Dg(\vec{x}_0) = D^3 f(\vec{x}_0)$. Se tiene que si $\{\vec{E}_j\}_{j=1}^{n^2}$ es una base de $B_2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ entonces

$$Dg(\vec{x}_0)(\vec{y}) = \sum_{j=1}^{n^2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(\vec{x}_0) y_i \vec{E}_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(\vec{x}_0) y_i dx_j \wedge dx_k.$$

Por lo tanto

$$Dg(\vec{x}_0) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(\vec{x}_0) dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k = D^3 f(\vec{x}_0),$$

donde $dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k = dx_i \wedge (dx_j \wedge dx_k)$.

En general $dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \in B_k(\underbrace{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{k-\text{veces}}, \mathbb{R})$ está definido por:

$$(dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k})(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots \vec{x}_k) = x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(2)} \cdots x_{i_k}^{(k)},$$

donde $\vec{x}_j = (x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)})$, $1 \leq j \leq k$.

Ahora si tenemos

$$D^{k-1} f(\vec{x}_0) = \sum_{i_2, i_3, \ldots, i_k = 1}^{n} \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_2} \partial x_{i_3} \cdots \partial x_{i_k}}(\vec{x}_0) dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} = h(\vec{x}_0),$$

entonces para calcular $D^k f(\vec{x}_0)$, procedemos así:

$$\begin{aligned} D^k f(\vec{x}_0)(\vec{y}) = Dh(\vec{x}_0)(\vec{y}) &= \sum_{j=1}^{n^{k-1}} \left(\sum_{i_1=1}^{n} \frac{\partial h_j}{\partial x_{i_1}}(\vec{x}_0) y_{i_1} \right) \vec{E}_j = \\ &= \sum_{i_1=1}^{n} \left(\sum_{i_2, \ldots, i_k = 1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(\vec{x}_0) y_i dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \right), \end{aligned}$$

donde $\{\vec{E}_j\}_{j=1}^{n^{k-1}} = \{dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \mid 1 \leq i_j \leq n,\ j = 2, \ldots, k\}$ es la base canónica de $B_{r-1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$, y por tanto se tiene:

$$D^k f(\vec{x}_0) = \sum_{i_1, \ldots, i_k = 1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(\vec{x}_0)(dx_1, \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}).$$

Es decir, si $\vec{x}_1 = (x_1^1, \ldots, x_n^1)$, $\vec{x}_2 = (x_1^2, \ldots, x_n^2), \ldots, \vec{x}_k = (x_1^k, \ldots, x_n^k)$, entonces

$D^k f(\vec{x}_0) : \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{k-\text{factores}} \to \mathbb{R}$ es la función k–lineal:

$$D^k f(\vec{x}_0)(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k) = \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(\vec{x}_0)(dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k})(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k) =$$
$$= \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(\vec{x}_0) x_{i_1}^1 x_{i_2}^2 \cdots x_{i_k}^k.$$

En particular, $D^k f(\vec{x}_0)(\underbrace{\vec{x}, \ldots, \vec{x}}_{k-\text{veces}}) = \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(\vec{x}_0) x_{i_1}, \cdots x_{i_k} =: D^k f(\vec{x}_0)(\vec{x}^k)$.

Definición 6.1.9 Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con A un conjunto abierto. La función f se llama de *clase* C^r *en* A si $D^1 f = Df$, $D^2 f, \ldots, D^r f$ existen y además son continuas en A.

Si f es de clase C^r para toda $r \in \mathbb{N}$, se dice que f es de clase *clase* C^∞.

Ahora si f es de clase C^r y $k \leq r$, en el cálculo de las derivadas parciales de orden k de f, no importa en el orden en que éstas se realicen por lo que la derivada parcial $\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$, con $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = k$, se presenta un total de

$$\binom{k}{\alpha_1}\binom{k-\alpha_1}{\alpha_2} \cdots \binom{k-\alpha_1-\alpha_2-\cdots-\cdots\alpha_i}{\alpha_{i+1}} \cdots \binom{k-\alpha_1-\alpha_2-\cdots-\alpha_{n-1}}{\alpha_n} =$$
$$= \frac{k!}{(k-\alpha_1)!\alpha_1!} \frac{(k-\alpha_1)!}{(k-\alpha_1-\alpha_2)!\alpha_2!} \cdots \frac{(k-\alpha_1-\alpha_2\cdots-\alpha_i)!}{(k-\alpha_1-\alpha_2-\cdots-\alpha_i-\alpha_{i+1})!\alpha_{i+1}!} \cdots$$
$$\cdots \frac{(k-\alpha_1-\cdots-\alpha_{n-1})!}{0!\ \alpha_n!} =$$
$$= \frac{k!}{\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_n!} =: \binom{k}{\alpha_1, \cdots, \alpha_n} \quad \text{veces.}$$

Al número $\binom{k}{\alpha_1, \cdots, \alpha_n} = \frac{k!}{\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_n!}$ con $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n = k$, se le llama *coeficiente multinomial*. Por lo tanto, en este caso, se tiene:

$$D^k f(\vec{x}_0)(\vec{x}^k) = \sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=k \\ \alpha_1\geq 0,\ldots,\alpha_n\geq 0}} \binom{k}{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}(\vec{x}_0) x^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}.$$

Resuminedo todo lo anterior tendremos:

Teorema 6.1.10 *Sean* $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *una función con* A *un conjunto abierto y* $f = (f_1, \ldots, f_m)$, $f_j : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq m$. *Entonces:*

(1).- *Las funciones componentes de* $D^k f(\vec{x}_0) \in \mathbb{R}^{n^k \cdot m}$ *son:*

$$\left\{ \frac{\partial^k f_j}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(\vec{x}_0) \mid 1 \leq i_\ell \leq n, 1 \leq \ell \leq k, 1 \leq j \leq m \right\}.$$

(2).- f *es de clase* $C^r \iff f_j$ *es de clase* C^r *para toda* $1 \leq j \leq m$.

(3).- f_j *es de clase* $C^r \iff \dfrac{\partial^s f_j}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_s}}$ *existen y son continuas para toda* $1 \leq s \leq r$.

(4).- $D^k f(\vec{x}_0) = (D^k f_1(\vec{x}_0), \ldots, D^k f_m(\vec{x}_0)) \in \mathbb{R}^{n^k \cdot m}$, $D^k f_i(\vec{x}_0) \in \mathbb{R}^{n^k}$, $1 \leq i \leq m$.

(5).- $(D^k f_j(\vec{x}_0))(\vec{e}_{i_1})(\vec{e}_{i_2}) \cdots (\vec{e}_{i_k}) = \dfrac{\partial^k f_j(\vec{x}_0)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_k}}$.

(6).- *Si* $m = 1$, $\{dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} | 1 \leq i_\ell \leq n, 1 \leq \ell \leq k\}$ *es la base canónica de* $B_k(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$.

(7).- *Si* $m = 1$, $D^k f(\vec{x}_0) = \displaystyle\sum_{i_1, \ldots i_k = 1}^{n} \frac{\partial^k f(\vec{x}_0)}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$ *y por tanto* $D^k f(\vec{x}_0)(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k) = \displaystyle\sum_{i_1, \ldots, i_k = 1}^{n} \frac{\partial^k f(\vec{x}_0)}{\partial x_{i_1} \partial_{i_2} \cdots \partial x_{i_k}} x^1_{i_1} x^2_{i_2} \cdots x^k_{i_k}$ *donde* $\vec{x}_j = (x^j_1, x^j_2, \ldots, x^j_n)$, $1 \leq j \leq k$.

(8).- *Si* $m = 1$ *y* $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, *entonces:*

$$\begin{aligned} D^k f(\vec{x}_0)(\vec{x}^k) &= \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k = 1}^{n} \frac{\partial^k f(\vec{x}_0)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_k}} x_{i_1} \cdots x_{i_k} = \\ &= \sum_{\substack{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m = k \\ \alpha_1 \geq 0, \ldots, \alpha_n \geq 0}} \binom{k}{\alpha_1, \ldots, \alpha_m} \frac{\partial^k f(\vec{x}_0)}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}. \end{aligned}$$

❏

6.2 El Teorema de Taylor y sus aplicaciones

Igual que como en el caso de una variable, el Teorema de Taylor nos servirá para aproximar funciones de clase C^r por medio de polinomios de n variables de grado a lo más r.

Teorema 6.2.1 (Polinomios de Taylor) *Sea* $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A *un conjunto abierto y sean* $\vec{a}, \vec{x} \in A$ *tales que* $[\vec{a}, \vec{x}] \subseteq A$. *Si* f *es de clase* C^r, *entonces existe* $\vec{c} \in (\vec{a}, \vec{x})$ *tal que:*

$$f(\vec{x}) = f(\vec{a}) + \sum_{k=1}^{r-1} \frac{1}{k!} D^k f(\vec{a})(\vec{x} - \vec{a})^k + \frac{1}{r!} D^r f(\vec{c})(\vec{x} - \vec{a})^r.$$

<u>*Demostración*</u>. Sea $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $\phi(t) = f(\vec{a} + t(\vec{x} - \vec{a}))$.

Por el Teorema de Taylor en una variable, se tiene que:

$$\begin{aligned}\phi(1) &= \phi(0) + \sum_{k=1}^{r-1} \frac{1}{k!}\phi^{(k)}(0)(1-0)^k + \frac{1}{r!}\phi^{(r)}(t_0)(1-0)^r = \\ &= \phi(0) + \sum_{k=1}^{r-1} \frac{1}{k!}\phi^{(k)}(0) + \frac{1}{r!}\phi^{(r)}(t_0) \quad \text{con} \quad t_0 \in (0,1).\end{aligned}$$

Sea $H : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ dada por $H(t) = \vec{a} + t(\vec{x} - \vec{a})$.

Entonces H es de clase C^∞ y $\phi = f \circ H$ por lo tanto ϕ es en efecto de clase C^r y además se tiene:

$$D\phi(t) = \phi'(t) = Df(H(t)) \circ DH(t) = Df(H(t))((\vec{x} - \vec{a})) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)\frac{\partial f}{\partial x_i}(H(t)).$$

Ahora:

$$\begin{aligned}\phi''(t) = D^2\phi(t) &= \sum_{i=1}^{n}(x_i - a_i) D\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \circ H\right)(t) = \\ &= \sum_{i=1}^{n}(x_i - a_i) D\frac{\partial f}{\partial x_i}(H(t)) \circ DH(t) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - a_i) D\left(\frac{\partial f}{x_i}(H(t))\right)(\vec{x} - \vec{a}) = \\ &= \sum_{i=1}^{n}(x_i - a_i)\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(H(t))(x_j - a_j) = \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(H(t))(x_i - a_i)(x_j - a_j) = \\ &= D^2 f(H(t))(\vec{x} - \vec{a}, \vec{x} - \vec{a}) = D^2 f(H(t))(\vec{x} - \vec{a})^2.\end{aligned}$$

Supongamos que

$$\begin{aligned}\phi^{(p)}(t) &= D^p f(H(t))(\vec{x} - \vec{a})^p = \\ &= \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n} \cdots \sum_{i_p=1}^{n} \frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_p}}(H(t))(x_{i_1} - a_{i_1}) \cdots (x_{i_p} - a_{i_p}).\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
&\phi^{(p+1)}(t) = \\
&= D(\phi^{(p)}(t)) = \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\cdots\sum_{i_p=1}^{n} D\left(\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_p}}(H(t))\right)(x_{i_1}-a_{i_1})\cdots(x_{i_p}-a_{i_p}) = \\
&= \sum_{i_1,\ldots,i_p=1}^{n}(x_{i_1}-a_{i_1})\cdots(x_{i_p}-a_{i_p})D\left(\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_p}}(H(t))\right)\cdot\underbrace{(H(t))}_{\substack{\| \\ \vec{x}-\vec{a}}} = \\
&= \sum_{i_1,\ldots,i_p=1}^{n}(x_{i_1}-a_{i_1})\cdots(x_{i_p}-a_{i_p})\sum_{i_{p+1}=1}^{n}\frac{\partial^{p+1} f}{\partial x_{i_{p+1}}\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_p}}(H(t))(x_{i_{p+1}}-a_{i_{p+1}}) = \\
&= \sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_p=1}^{n}\sum_{i_{p+1}=1}^{n}\frac{\partial^{p+1} f}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_p}\partial x_{i_{p+1}}}(H(t))(x_{i_1}-a_{i_1})\cdots(x_{i_p}-a_{i_p})(x_{i_{p+1}}-a_{i_{p+1}}) = \\
&= D^{p+1}f(H(t))(\vec{x}-\vec{a})^{p+1}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, para toda $k < r$, $\phi^{(k)}(0) = D^k f(H(0))(\vec{x}-\vec{a})^k = D^k f(\vec{a})(\vec{x}-\vec{a})^k$.

Ahora sea $\vec{c} = \vec{a} + t_0(\vec{x}-\vec{a}) \in (\vec{a},\vec{x})$ y $\phi^{(r)}(t_0) = D^r f(H(t_0))(\vec{x}-\vec{a})^r$.

Por lo tanto

$$f(\vec{x}) = f(\vec{a}) + \sum_{k=1}^{r-1}\frac{1}{k!}D^k(f(\vec{a}))(\vec{x}-\vec{a})^k + \frac{1}{r!}D^r f(\vec{c})(\vec{x}-\vec{a})^r.$$ ❑

Observaciones 6.2.2

(1).- En coordenadas, el desrrollo anterior tendrá la forma:

$$\begin{aligned}
&f(\vec{x}) = \\
&= f(\vec{a}) + \sum_{k=1}^{r-1}\frac{1}{k!}\left\{\sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_k=1}^{n}\frac{\partial^k f(\vec{a})}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_k}}(x_{i_1}-a_{i_1})\cdots(x_{i_k}-a_{i_k})\right\} + \\
&\qquad + \frac{1}{r!}\sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_r=1}^{n}\frac{\partial^r f(\vec{c})}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_k}}(x_{i_1}-a_{i_1})\cdots(x_{i_r}-a_{i_r}) = \\
&= f(\vec{a}) + \sum_{k=1}^{r-1}\frac{1}{k!}\sum_{\substack{j_1+\cdots+j_n=k \\ j_1\geq 0,\ldots,j_n\geq 0}}\binom{k}{j_1,j_2,\ldots,j_n}\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{j_1}\cdots\partial x_n^{j_n}}(\vec{a})(x_1-a_1)^{j_1}\cdots(x_n-a_n)^{j_n} + \\
&\qquad + \frac{1}{r!}\sum_{\substack{j_1+\cdots+j_n=r \\ j_1\geq 0,\ldots,j_n\geq 0}}\binom{r}{j_1,j_2,\ldots,j_n}\frac{\partial^r f(\vec{c})}{\partial x_1^{j_1}\cdots\partial x_n^{j_n}}(x_1-a_1)^{j_1}\cdots(x_n-a_n)^{j_n}.
\end{aligned}$$

(2).- A $\dfrac{D^r f(\vec{c})}{r!}(\vec{x}-\vec{a})^r$ se le llama el *residuo de orden* $r-1$ *de* f *en* $\vec{a}$.

Lo denotamos: $R_{f,\vec{a},r-1}(\vec{x}) = \dfrac{D^r f(\vec{c})}{r!}(\vec{x}-\vec{a})^r$.

Ahora veamos como aproxima el Polinomio de Taylor a la función.

Teorema 6.2.3 *Se tiene:*

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \frac{R_{f,\vec{a},m}(\vec{x})}{\|\vec{x}-\vec{a}\|^m} = 0.$$

<u>*Demostración*</u>. En el teorema tenemos $m = r-1$. Se tiene que $\dfrac{\partial^r f}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_r}}(\vec{x})$ es continua en $\vec{a}$. Por lo tanto existe una vecindad U de $\vec{a}$ y un $M > 0$ tal que $\left|\dfrac{\partial^r f}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_r}}(\vec{x})\right| \leq M$ para toda $\vec{x}\in U$ y $1 \leq i_j \leq m$, $1 \leq j \leq r$.

Entonces,

$$\begin{aligned}
|R_{\vec{a},r-1}(\vec{x})| &= \left|\frac{D^r f(\vec{c})}{r!}(\vec{x}-\vec{a})\right| = \\
&= \frac{1}{r!}\left|\sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\cdots\sum_{i_r=1}^{n}\frac{\partial^r f}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_r}}(\vec{c})(x_{i_1}-a_{i_1})\cdots(x_{i_r}-a_{i_r})\right| \leq \\
&\leq \frac{1}{r!}\sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\cdots\sum_{i_r=1}^{n}\left|\frac{\partial^r f}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_r}}(\vec{c})\right||x_{i_1}-a_{i_1}|\cdots|x_{i_r}-a_{i_r}| \leq \\
&\leq \frac{1}{r!}\sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\cdots\sum_{i_r=1}^{n} M\|\vec{x}-\vec{a}\|^r = \frac{1}{r!}Mn^r\|\vec{x}-\vec{a}\|^r.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{|R_{f,\vec{a},r-1}(\vec{x})|}{\|\vec{x}-\vec{a}\|^{r-1}} \leq \frac{Mn^r}{r!}\|\vec{x}-\vec{a}\| \xrightarrow[\vec{x}\to\vec{a}]{} 0.$$ ❏

Definiciones 6.2.4 Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A un conjunto abierto, una función de clase C^r. Sean $\vec{x},\vec{a}\in A$ tales que $[\vec{a},\vec{x}]\subseteq A$. Al polinomio:

$$\sum_{k=0}^{r-1}\frac{1}{k!}D^k f(\vec{a})(\vec{x}-\vec{a})^k = f(\vec{a}) + \sum_{k=1}^{r-1}\frac{1}{k!}D^k f(\vec{a})(\vec{x}-\vec{a})^k$$

se le llama el *Polinomio de Taylor de orden* $(r-1)$ *de* f *en* $\vec{a}$ y se denota por $P_{f,\vec{a},r-1}(\vec{x})$.

Se tiene que

$$f(\vec{x}) = P_{f,\vec{a},r-1}(\vec{x}) + R_{f,\vec{a},r-1}(\vec{x}).$$

Ahora si f es de clase C^∞, $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, entonces para toda $m \in \mathbb{N}$, $f(\vec{x}) = P_{f,\vec{a},m}(\vec{x}) + R_{f,\vec{a},m}(\vec{x})$.

Además si existe $\delta > 0$ tal que $\lim\limits_{m\to\infty} R_{f,\vec{a},m}(\vec{x}) = 0$ para toda $\vec{x} \in B(\vec{a},\delta) \subseteq A$, entonces

$$f(\vec{x}) = \lim_{m\to\infty} P_{f,\vec{a},m}(\vec{x}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} D^m f(\vec{a})(\vec{x}-\vec{a})^m \quad \text{para toda} \quad \vec{x} \in B(\vec{a},\delta)$$

y en este caso se dice que f es *analítica en A*. Es decir, una función es analítica en A si para toda $\vec{a} \in A$, existe $\delta > 0$ tal que $B(\vec{a},\delta) \subseteq A$ y para toda $\vec{x} \in B(\vec{a},\delta)$ se tiene que $f(\vec{x}) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} D^m f(\vec{a})(\vec{x}-\vec{a})^m$.

Si f es de clase C^∞ a $\sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{D^m f(\vec{a})}{m!}(\vec{x},\vec{a})^m$ se le llama la *Serie de Taylor* de f en $\vec{a}$.

Observación 6.2.5 Aunque f sea de clase C^∞, no necesariamente se tiene que

$$f(\vec{x}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} D^m f(\vec{a})(\vec{x}-\vec{a})^m$$

es decir, f no necesariamente es analítica.

Ejemplo 6.2.6 Si

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}, \qquad f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},$$

se prueba que $\frac{\partial^k f}{\partial x^i \partial y^j}(x,y)$ existen para cualquier $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $i + j = k$, $i \geq 0$, $j \geq 0$ y además que $\frac{\partial^k f}{\partial x^i \partial y^j}(0,0) = 0$. Por lo tanto para toda $m \in \mathbb{N}$, $D^m f(0,0) = 0$ y por lo tanto $\sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} D^m f(0,0)((x,y))^n = 0 \neq f(x,y)$.

Ejemplos 6.2.7

(1).- Calculamos el desarrollo de Taylor de grado 2 de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \sqrt{1+x^2+y^2}$ en $\vec{a} = (0,0)$.

Se tiene que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}; \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -2xy(1+x^2+y^2)^{-3/2}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{xy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}};$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}} - \frac{1}{2}\frac{x(2x)}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{1+y^2}{(1+x^2+y^2)^{3/2}};$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}} - \frac{1}{2}\frac{y(2y)}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{1+x^2}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}.$$

se tiene que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0);$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 0;$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 1 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0).$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(0,0) + D^1 f(0,0)((x,y)) + \frac{D^2 f}{2!}(0,0)((x,y))^2 + \frac{D^3 f}{3!}(x_0,y_0)((x,y))^3 = \\ &= 1 + 0 + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)y^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)xy\right) + \\ &\qquad + \frac{1}{3!}D^3 f(x_0,y_0)((x,y))^3 = \\ &= 1 + \frac{1}{2}(x^2+y^2) + R_{f,(0,0),2}(x,y) \end{aligned}$$

y

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{R_{f,(0,0),2}(x,y)}{\|(x,y)\|^2} = 0.$$

(2).- Expresemos el polinomio $x^2y + x^3 + y^3$ en términos de $(x-1)$ y $(y+1)$. Se tiene

$$p(x,y) = \sum_{k=0}^{3} \frac{D^k f(1,-1)}{k!}((x,y)-(1-1))^k + \underbrace{R_{p,(1,-1),3}(x,y)}_{\substack{\| \\ 0}} = x^2y + x^3 + y^3.$$

Tenemos que

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 2xy + 3x^2; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = x^2 + 3y^2; \quad \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 2y + 6x;$$
$$\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 6y; \quad \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} = 2x; \quad \frac{\partial^3 p}{\partial y^3} = 6; \quad \frac{\partial^3 p}{\partial y^3} = 6; \quad \frac{\partial^3 p}{\partial x^2 \partial y} = 2; \quad \frac{\partial^3 p}{\partial x \partial y^2} = 0.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
p(x,y) = p(1,-1) &+ \left(\frac{\partial p}{\partial x}(1,-1)(x-1) + \frac{\partial p}{\partial y}(1,-1)(y+1)\right) + \\
&+ \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(1,-1)(x-1)^2 + 2\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y}(1,-1)(x-1)(y+1) + \right.\\
&\qquad \left. + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}(1,-1)(y+1)^2\right) + \\
&+ \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3 p}{\partial x^3}(1,-1)(x-1)^3 + 3\frac{\partial^3 p}{\partial x^2 \partial y}(1,-1)(x-1)^2(y+1) + \right.\\
&\qquad \left. + 3\frac{\partial^3 p}{\partial y^2 \partial x}(1,-1)(x-1)(y+1)^2 + \frac{\partial^3 p}{\partial y^3}(1,-1)(y+1)^3\right) = \\
&= -1 + (1\cdot(x-1) + 4(y+1)) + \frac{1}{2}(4(x-1)^2 + 4(x-1)(y+1) - \\
&\qquad - 6(y+1)^2) + \frac{1}{6}(6(x-1)^3 + 6(x-1)^2(y+1) + 6(y+1)^3) = \\
&= -1 + (x-1) + 4(y+1) + 2(x-1)^2 + 2(x-1)(y+1) - \\
&\qquad - 3(y+1)^2 + (x-1)^3 + (x-1)^2(y+1) + (y+1)^3.
\end{aligned}$$

(3).- Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la función $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^m$.

Para el desarrollo de Taylor en $\vec{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ se tiene:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = m(m-1)\cdots(m-k+1)(x_1 + \cdots + x_n)^{m-k}$$

si $k \leq m$ y

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

para $k > m$.

Ahora para $k \leq m$, $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(0,\ldots,0) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k < m, \\ m! & \text{si} \quad k = m \end{cases}$. Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
f(x_1,\ldots,x_n) &= \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} D^k f(\vec{0})((x_1,\ldots,x_n))^k + \\
&\quad + \underbrace{\frac{1}{(m+1)!} D^{m+1} f(\vec{c})((x_1,\ldots,x_n))^{m+1}}_{\substack{\| \\ 0}} = \\
&= \frac{D^m f(\vec{0})}{m!}((x_1,\ldots,x_n))^m = \\
&= \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\cdots\sum_{i_m=1}^{n} \frac{1}{m!} \underbrace{\frac{\partial^m f(\vec{0})}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_m}}}_{m!} x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_m} = \\
&= \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_m=1}^{n} x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_m} = \\
&= \sum_{\substack{i_1+i_2+\cdots+i_n=m \\ i_1\geq 0,\ldots,i_n\geq 0}} \frac{1}{m!}\frac{\partial^m f(\vec{0})}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_m}} \binom{m}{i_1,\ldots,i_n} x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto se tiene la fórmula del binomio de Newton generalizada:

$$
(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^m = \sum_{\substack{i_1+i_2+\cdots+i_n=m \\ i_1\geq 0,\cdots,i_n\geq 0}} \binom{m}{i_1,i_2,\ldots,i_n} a_1^{i_1}a_2^{i_2}\cdots a_n^{i_n}.
$$

(4).- Hallamos la mejor aproximación de segundo grado (es decir el polinomio de segundo grado que aproxima a la función) de la función $f(x,y) = xe^y$ en una vecindad del punto $(x_0,y_0) = (2,0)$.

Se tiene que esta aproximación es el polinomio de Taylor de grado 2.

$$
\frac{\partial f}{\partial x}(2,0) = e^y|_{(2,0)} = 1; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(2,0) = xe^y|_{(2,0)} = 2;
$$

$$
\frac{\partial f}{\partial x^2}(2,0) = 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2,0) = e^y|_{(2,0)} = 1; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2,0) = xe^y|_{(2,0)} = 2.
$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
p(x,y) &= 2 + (1\cdot(x-2) + 2\cdot y) + \frac{1}{2!}(0 + 2\cdot 1(x-2)y + 2y^2) = \\
&= 2 + (x-2) + 2y + (x-2)y + y^2.
\end{aligned}
$$

6.3 Máximos y mínimos

Definición 6.3.1 Sean $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A un conjunto abierto y $\vec{x}_0 \in A$. Se dice que *f alcanza un máximo local en $\vec{x}_0$* si existe $\delta > 0$ tal que $B(\vec{x}_0, \delta) \subseteq A$ y $f(\vec{x}_0) \geq f(\vec{x})$ para toda $\vec{x} \in B(\vec{x}_0, \delta)$, es decir, el máximo valor que alcanza f en una vecindad de $\vec{x}_0$ es $f(\vec{x}_0)$.

Se dice que $\vec{x}_0$ *es mínimo local de f* ó que *f alcanza un mínimo local en $\vec{x}_0$* si existe $\delta > 0$ tal que $B(\vec{x}_0, \delta) \subseteq A$ y $f(\vec{x}_0) \leq f(\vec{x})$ para toda $\vec{x} \in B(\vec{x}_0, \delta)$.

Un punto $\vec{x}_0 \in A$ se llama *extremo* si $f(\vec{x}_0)$ es un máximo ó un mínimo local.

Un punto $\vec{x}_0 \in A$ se llama *crítico* si f es diferenciable en $\vec{x}_0$ y $Df(\vec{x}_0) = 0$.

Teorema 6.3.2 *Sean $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función diferenciable, A un conjunto abierto y $\vec{x}_0 \in A$ un punto extremo de f. Entonces $Df(\vec{x}_0) = 0$, es decir, $\vec{x}_0$ es un punto crítico.*

Demostración. Sea $A_i = \{x \in \mathbb{R} | (x_1^{(0)}, \ldots, x_{i-1}^{(0)}, x, x_{i+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \in A\}$, A_i es un conjunto abierto de $\mathbb{R}$.

Sea $g : A_i \to \mathbb{R}$ dada por: $g_i(x) = f(x_1^{(0)}, \ldots, x_{i-1}^{(0)}, x, x_{i+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$.

Entonces $x_i^{(0)}$ es un punto extremo para $g_i(x)$. Se sigue que $\dfrac{dg_i}{dx}(x_i^{(0)}) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0)$. Por lo tanto $Df(\vec{x}_0) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0), \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}_0)\right) = (0, 0, \ldots, 0) = 0$. ❏

Observación 6.3.3 El recíproco del teorema no es cierto, es decir existen puntos críticos que no son extremos. Tales puntos se les llama *puntos silla*.

Ejemplos 6.3.4

(1).- Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, $f'(0) = 0$ y 0 no es punto extremo pues $x^3 > 0$ para $x > 0$ y $x^3 < 0$ para $x < 0$.

(2).- Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 - y^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x$; $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2y$. Por lo tanto $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0 = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$. Se sigue que $(0, 0)$ es un punto crítico.

Dada $\varepsilon > 0$,

$$(\varepsilon/2, 0) \in B((0, 0), \varepsilon) \quad \text{y} \quad f(\varepsilon/2, 0) = \frac{\varepsilon^2}{4} > 0,$$
$$(0, \varepsilon/2) \in B((0, 0, \varepsilon) \quad \text{y} \quad f(0, \varepsilon/2) = -\frac{\varepsilon^2}{4} < 0.$$

Por lo tanto $(0, 0)$ no es punto extremo

Ahora, cuando $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, es de clase C^2 en A, con A un conjunto abierto, se tiene que $D^2 f(\vec{x}_0) \in B_2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $\vec{x}_0 \in A$, es la forma bilineal:

$$D^2 f(\vec{x}_0)(\vec{x})(\vec{y}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}_0) x_i y_j,$$

donde $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ y $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)$. Por lo tanto, con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^n$, $D^2 f(\vec{x}_0)$ tiene la matriz:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(\vec{x}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\vec{x}_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_i}(\vec{x}_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\vec{x}_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_1}(\vec{x}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_2}(\vec{x}_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\vec{x}_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_n}(\vec{x}_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\vec{x}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(\vec{x}_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_i}(\vec{x}_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(\vec{x}_0) \end{pmatrix}.$$

Esta matriz se llama el *hessiano* de f en $\vec{x}_0$.

Ahora estudiaremos los máximos y los mínimos de una función por medio del hessiano.

Definición 6.3.5 Sea $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función bilineal. Entonces:

i).- Si $B(\vec{x}, \vec{x}) > 0$ para toda $\vec{x} \neq \vec{0}$, B se llama *positiva definida.*

ii).- Si $B(\vec{x}, \vec{x}) \geq 0$ para toda $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, B se llama *positiva semidefinida.*

iii).- Si $B(\vec{x}, \vec{x}) < 0$ para toda $\vec{x} \neq \vec{0}$, B se llama *negativa definida.*

iv).- Si $B(\vec{x}, \vec{x}) \leq 0$ para toda $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, B se llama *negativa semidefinida.*

Observación 6.3.6 Claramente se tiene que B es positiva definida $\iff$ $-B$ es negativa definida y B es positiva semidefinida $\Leftrightarrow -B$ es negativa semidefinida.

Teorema 6.3.7 *Sea $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función bilineal simétrica cuya matriz con respecto a alguna base es:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} = a_{ji}.$$

Entonces la forma cuadrática $Q(\vec{x}) = f(\vec{x}, \vec{x})$ *es positiva definida* $\iff$ $\det A_k > 0$ *para toda* $k = 1, \ldots, n$, *donde*

$$A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}.$$

Demostración. Se tiene $Q(x) = x^T A x$ con $x = (x_1, \ldots, x_n)$ con respecto a la base dada.
$\Rightarrow)$ Existe una matriz P no singular tal que $P^T A P = B =$dig $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$. Por lo tanto, con respecto a la base nueva (la que nos determina P), se tiene que:

$$Q(x) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2,$$

donde $x = (x_1, \ldots, x_n)$ con respecto a la nueva base. Puesto que Q es positiva definida se tiene que $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \ldots, \lambda_n > 0$. Por lo tanto $\det B = \det P^T \det A \det P = (\det P)^2 \det A = \lambda_1 \ldots \lambda_n > 0$. Esto implica que $\det A > 0$.

Ahora para $k < n$, tomamos $V_k = \{(x_1, \ldots x_k, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n\}$. V_k es subespacio de $\mathbb{R}^n$ y para $y \in V_k$ se tiene $Q(y) = y^T A y > 0$. Por lo tanto $Q|_{V_K}$ “ = ” A_k es positiva definida y entonces por lo anterior se tiene que $\det A_k > 0$.
$\Leftarrow)$ Sea $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ la base de $\mathbb{R}^n$ con respecto a la cual Q tiene la matriz A.

Queremos hallar una base $\{\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n\}$ de la forma

$$\begin{aligned} \vec{f}_1 &= \alpha_{11}\vec{e}_1, \\ \vec{f}_2 &= \alpha_{21}\vec{e}_1 + \alpha_{22}\vec{e}_2, \\ &\cdots\cdots \\ \vec{f}_k &= \alpha_{k1}\vec{e}_1 + \alpha_{k2}\vec{e}_2 + \cdots + \alpha_{kk}\vec{e}_k, \\ &\cdots\cdots \\ \vec{f}_n &= \alpha_{n1}\vec{e}_1 + \alpha_{n2}\vec{e}_2 + \cdots + \alpha_{nk}\vec{e}_k + \cdots + \alpha_{nn}\vec{e}_n, \end{aligned}$$

esto es, $\vec{f}_j = \sum\limits_{i=1}^{j} \alpha_{ji}\vec{e}_i$, $1 \le j \le n$, tal que $f(\vec{f}_k, \vec{e}_i) = 0$ para $i = 1, \ldots, k-1$ y $f(\vec{f}_k, \vec{e}_k) = 1$. Una vez encontrada tal base, entonces por simetría de la forma cuadrática, obtenemos:

$$\begin{aligned} f(\vec{e}_j, \vec{f}_k) &= f\Big(\vec{e}_j, \sum_{i=1}^{k} \alpha_{ki}\vec{e}_i\Big) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_{ki} a_{ji} = 0, \quad j = 1, \ldots, k-1, \\ f(\vec{e}_k, \vec{f}_k) &= f\big(\vec{e}_k, \sum_{i=1}^{k} \alpha_{ki}\vec{e}_i\big) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_{ki} a_{ki} = 1. \end{aligned}$$

De esto, obtenemos las ecuaciones:

$$\begin{aligned} a_{11}\alpha_{k1} + a_{12}\alpha_{k2} + \cdots + a_{1k}\alpha_{kk} &= 0, \\ a_{21}\alpha_{k1} + a_{22}\alpha_{k2} + \cdots + a_{2k}\alpha_{kk} &= 0, \\ \cdots\cdots \\ a_{k1}\alpha_{k1} + a_{k2}\alpha_{k2} + \cdots + a_{kk}\alpha_{kk} &= 1. \end{aligned}$$

Puesto que el determinante del sistema con respecto a $\alpha_{k1}, \alpha_{k2}, \ldots, \alpha_{kk}$, es $\det A_k > 0$, se tiene que el sistema tiene solución.

Con respecto a la base $\{\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_m\}$ se tendrá, para $i < k$,

$$f(\vec{f}_k, \vec{f}_i) = f(\vec{f}_k, \sum_{j=1}^{i} \alpha_{ij}\vec{e}_j) = \sum_{j=1}^{i} \alpha_{ij} f(\vec{f}_k, \vec{e}_j) = \sum_{j=1}^{i} \alpha_{ij}(0) = 0.$$

Por ser f simétrica, se tiene $f(\vec{f}_k, \vec{f}_i) = f(\vec{f}_i, \vec{f}_k) = 0$ para $i > k$.

Por último, $f(\vec{f}_k, \vec{f}_k) = f(\vec{f}_k, \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_{ki}\vec{e}_i) = \alpha_{kk} f(\vec{f}_k, \vec{e}_k) = \alpha_{kk}$.

Por lo tanto, con respecto a la base $\{\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n\}$, la matriz de f será

$$\text{diag } \{\alpha_{11}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{nn}\}.$$

Ahora, por el sistema de ecuaciones obtenido, se tiene que

$$\alpha_{kk} = \frac{\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,k-1} & 0 \\ a_{21} & \cdots & a_{2,k-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{k,k-1} & 1 \end{pmatrix}}{\det A_k} = \frac{\det A_{k-1}}{\det A_k} > 0.$$

Por lo tanto, si $\vec{x} = x_1\vec{f}_1 + \cdots + x_n\vec{f}_n$, se sigue que $Q(\vec{x}) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{ii} x_i^2 > 0$ para toda $\vec{x} \neq \vec{0}$. De esta forma obtenemos que Q es positiva definida. ❏

Observación 6.3.8 Si A es una matriz $n \times n$, entonces $\det(-A) = (-1)^n \det A$. Por lo tanto, según las notaciones del teorema, se tiene que $Q(\vec{x})$ es negativa definida $\iff$ $\det A_{2k} > 0$ y $\det A_{2k+1} < 0$ para $2k \leq n$, $2k+1 \leq n$.

Teorema 6.3.9

i).- *Si $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función de clase C^2, A es un conjunto abierto y si $\vec{x}_0$ es un punto crítico tal que $D^2 f(\vec{x}_0)$ es negativa definida, entonces f tiene un máximo local en $\vec{x}_0$.*

ii).- *Si f tiene un máximo local en $\vec{x}_0$, entonces $D^2f(\vec{x}_0)$ es negativa semidefinida.*

<u>*Demostración*</u>.

i).- Se tiene que $D^2f(\vec{x}_0)(\vec{x},\vec{x}) < 0$ para toda $\vec{x} \neq \vec{0}$ y $D^2f(\vec{x}_0)$ es continua.

Sea $S = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\vec{x}\| = 1\}$ el cual es un conjunto compacto. Por lo tanto exite $m < 0$ tal que $D^2f(\vec{x}_0)(\vec{x},\vec{x}) \leq m$ para toda $\vec{x} \in S$.

Puesto que D^2f es continua, existe $\delta > 0$ tal que si $\|\vec{c} - \vec{x}_0\| < \delta$, entonces $D^2f(\vec{c})(\vec{x},\vec{x}) \leq \dfrac{m}{2}$ para toda $\vec{x} \in S$.

De hecho, existe $\delta > 0$ tal que para toda $1 \leq i, j \leq n$,

$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{c}) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}_0)\right| < -\frac{m}{2n^2} \quad \text{si} \quad \|\vec{c} - \vec{x}_0\| < \delta.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} |D^2f(\vec{c})(\vec{x},\vec{x}) - D^2f(\vec{x}_0)(\vec{x},\vec{x})| &\leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{c}) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}_0)\right| |x_i||x_j| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} -\frac{m}{2n^2} \cdot \|\underset{\substack{\|\\1}}{\text{x}}\|^2 = -\frac{m}{2n^2} \cdot n^2 = -\frac{m}{2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $D^2f(\vec{c})(\vec{x},\vec{x}) \leq -\dfrac{m}{2} + D^2f(\vec{x}_0)(\vec{x},\vec{x}) \leq -\dfrac{m}{2} + m = \dfrac{m}{2}$ para toda $\vec{x} \in S$.

Por el Teorema de Taylor, para toda $\vec{\omega}$ tal que $0 < \|\vec{\omega} - \vec{x}_0\| < \delta$, existe $\vec{c}$ tal que $\|\vec{c} - \vec{x}_0\| < \delta$ y $f(\vec{\omega}) = f(\vec{x}_0) + Df(\vec{x}_0)(\vec{\omega} - \vec{x}_0) + \dfrac{1}{2}D^2f(\vec{c})(\vec{\omega} - \vec{x}_0)^2$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} f(\vec{\omega}) - f(\vec{x}_0) &= \frac{1}{2}D^2f(\vec{c})\Bigg(\underbrace{\frac{\vec{\omega} - \vec{x}_0}{\|\vec{\omega} - \vec{x}_0\|}}_{\in\, S}, \underbrace{\frac{\vec{\omega} - \vec{x}_0}{\|\vec{\omega} - \vec{x}_0\|}}_{\in\, S}\Bigg)\|\vec{\omega} - \vec{x}_0\|^2 \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{2}\|\vec{\omega} - \vec{x}_0\|^2 < 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto $f(\vec{x}_0) > f(\vec{\omega})$ para toda $\vec{\omega}$ tal que $0 < \|\vec{\omega} - \vec{x}_0\| < \delta$. Se sigue que $\vec{x}_0$ es un máximo.

ii).- Sea $\vec{x}_0$ un máximo local y supongamos que $D^2f(\vec{x}_0)$ no es negativa semidefinida. Se sigue que existe $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $D^2f(\vec{x}_0)(\vec{x},\vec{x}) > 0$. Ahora, puesto

que existe una vecindad de $\vec{x}_0$ en donde f está definida, entonces existe una vecindad U de $0 \in \mathbb{R}$ tal que $g(t) = -f(\vec{x}_0 + t\vec{x})$ está definida.

Se tiene $g'(t) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0 + t\vec{x})x_i$ y $g'(0) = 0$. Por lo tanto 0 es un punto crítico de g y $g''(t) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\vec{x}_0 + t\vec{x})x_i x_j = -D^2 f(\vec{x}_0 + t\vec{x})(\vec{x}, \vec{x})$. Por lo tanto $g''(0) = -D^2 f(\vec{x}_0)(\vec{x}, \vec{x}) < 0$. Se sigue que 0 es un máximo local de g. Por lo tanto existe $\delta > 0$ tal que si $t \neq 0$ y $|t| < \delta$ entonces $g(0) > g(t)$. Por lo tanto $-f(\vec{x}_0) > -f(\vec{x}_0 + t\vec{x})$, es decir, $f(\vec{x}_0) < f(\vec{x}_0 + t\vec{x})$ para toda $t \neq 0$, $|t| < \delta$ lo cual contradice que $\vec{x}_0$ es un máximo local. Esta contradicción prueba lo deseado. ❑

En forma análoga tendremos:

Teorema 6.3.10

i).- *Si $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función de clase C^2, A un conjunto abierto y si $\vec{x}_0$ es un punto crítico tal que $D^2 f(\vec{x}_0)$ es positiva definida, entonces f tiene un mínimo local en $\vec{x}_0$.*

ii).- *Si f tiene un mínimo local en $\vec{x}_0$, entonces $D^2 f(\vec{x}_0)$ es positiva semidefinida.*

Demostración. Ejercicio (definir $g = -f$ y aplicar el teorema anterior). ❑

Volvamos al hessiano de f en $\vec{x}_0$, $H_{\vec{x}_0}(f) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}_0)\right]_{1 \leq i \leq n}^{1 \leq j \leq n}$ con respecto a la base canónica. Sea Δ_k el determinante de la matriz

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(\vec{x}_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_k}(\vec{x}_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_1}(\vec{x}_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_k}(\vec{x}_0) \end{bmatrix}, \qquad 1 \leq k \leq n.$$

Aplicando nuestros resultados anteriores tendremos, para un punto crítico $\vec{x}_0$ de la función f:

(1) Si $H_{\vec{x}_0}(f)$ es negativa definida, entonces f tiene un máximo local en $\vec{x}_0$. Si f tiene máximo local en $\vec{x}_0$, entonces $H_{\vec{x}_0}(f)$ es negativa semidefinida.

(2) Si $H_{\vec{x}_0}(f)$ es positiva definida, entonces f tiene un mínimo local en $\vec{x}_0$.

Si f tiene un mínimo local en $\vec{x}_0$, entonces $H_{\vec{x}_0}(f)$ es positiva semidefinida.

(3) $H_{\vec{x}_0}(f)$ es positiva definida $\iff$ $\Delta_k > 0$ para toda $k = 1, \ldots, n$.

(4) $H_{\vec{x}_0}(f)$ es positiva semidefinida sólo si $\Delta_k \geq 0$ para toda $k = 1, \ldots, n$.

(5) $H_{\vec{x}_0}(f)$ es negativa definida $\iff$ $\Delta_{2\ell-1} < 0$ y $\Delta_{2\ell} > 0$ para toda ℓ tal que $2\ell - 1, 2\ell \leq n$.

(6) $H_{\vec{x}_0}(f)$ es negativa semidefinida sólo si $\Delta_{2\ell-1} \leq 0$ y $\Delta_{2\ell} \geq 0$ para toda ℓ tal que $2\ell - 1, 2\ell \leq n$.

(7) Si $\Delta_k < 0$ para algún k, f no tiene mínimo local en $\vec{x}_0$.

Si $\Delta_{2\ell-1} > 0$ o $\Delta_{2\ell} < 0$ para algún ℓ, f no tiene máximo local en $\vec{x}_0$.

Si $\Delta_{2\ell} < 0, f$ no tiene ni máximo ni mínimo local en $\vec{x}_0$, es decir $\vec{x}_0$ es punto silla de f.

Si se cumple (3), f tiene un mínimo local en $\vec{x}_0$. Si se cumple (4), f tiene máximo local en $\vec{x}_0$.

Cuando todos estos criterios fallan hay que proceder directamente para investigar la naturaleza del punto crítico, es decir, recurrir a la definición de máximo local, mínimo local ó punto silla.

Aplicando lo anterior el caso particular $n = 2$, es decir $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A un conjunto abierto, $\vec{x}_0 \in \mathring{A}$, $\vec{x}_0$ punto crítico, es decir, $Df(\vec{x}_0) = 0$, por lo que el hessiano de f en $\vec{x}_0$ será:

$$A = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{x}_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\vec{x}_0) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\vec{x}_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\vec{x}_0) \end{bmatrix} \quad \text{y si} \quad \Delta = \det A, \quad \text{se tiene :}$$

Teorema 6.3.11 *Sean $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto y $f : A \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2. Sea $\vec{x}_0 \in A$ un punto crítico de f y sea* $\Delta = \det A = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{x}_0) \cdot \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\vec{x}_0) - \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\vec{x}_0) \right)^2$. *Entonces*

(1).- *Si $\Delta > 0$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{x}_0) > 0$ entonces f tiene un mínimo local en $\vec{x}_0$.*

(2).- *Si $\Delta > 0$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\vec{x}_0) < 0$ entonces f tiene un máximo local en $\vec{x}_0$.*

(3).- *Si $\Delta < 0$ entonces $\vec{x}_0$ es un punto silla.*

<u>*Demostración*</u>. Ejercicio. ❏

Observación 6.3.12 Si $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es de clase C^2 y $\vec{x}_0$ es un punto crítico, pero $D^2 f(\vec{x}_0)$ no es ni positiva ni negativa semidefinida, entonces $\vec{x}_0$ es un punto silla.

En efecto gracias a los teoremas anteriores $\vec{x}_0$ no ni máximo ni mínimo, por lo que necesariamente $\vec{x}_0$ es un punto silla.

Antes de dar los ejemplos demostramos una generalización de los teoremas anteriores.

Teorema 6.3.13

i).- *Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función de clase C^r con $r > 1$. Sea $\vec{x}_0 \in A$ tal que $Df(\vec{x}_0) = \cdots = D^{r-1} f(\vec{x}_0) = 0$ y $D^r f(\vec{x}_0)(\vec{x})^r = D^r f(\vec{x}_0)(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}) < 0$ para toda $\vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$. Entonces $\vec{x}_0$ es un máximo local para f.*

ii).- *Si $D^r f(\vec{x}_0)(\vec{x}, \ldots, \vec{x}) > 0$ para toda $\vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$, entonces $\vec{x}_0$ es un mínimo local.*

<u>*Demostración*</u>.

i).- Sea $D^r f(\vec{x}_0)(\vec{x}, \ldots, \vec{x}) < 0$ para toda $\vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$.

Sea $S = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\vec{x}\| = 1\}$, S es un conjunto compacto. Puesto que $D^r f(\vec{x}_0)(\vec{x}, \ldots, \vec{x}) < 0$ para toda $\vec{x} \in S$ y S es un conjunto compacto, tenemos que existe $m < 0$ tal que $D^r f(\vec{x}_0)(\vec{x}, \ldots, \vec{x}) \leq m$ para toda $\vec{x} \in S$.

Afirmamos que existe $\delta > 0$ tal que $D^r f(\vec{c})(\vec{x}, \ldots, \vec{x}) \leq \dfrac{m}{2}$ para toda $\vec{c}$ tal que $\|\vec{c} - \vec{x}_0\| < \delta$ y para toda $\vec{x} \in S$.

En efecto, puesto que f es de clase C^r, $\dfrac{\partial^r f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_r}}(\vec{x})$ es continua en A para toda $1 \leq i_1, \ldots, i_r \leq n$, se tiene que existe $\delta > 0$ tal que $\|\vec{c} - \vec{x}_0\| < \delta$. Se sigue que

$$\left| \frac{\partial^r f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_r}}(\vec{c}) - \frac{\partial^r f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_r}}(\vec{x}_0) \right| \leq -\frac{m}{2n^r}$$

para cualesquiera $1 \leq i_1, i_2, \ldots, i_r \leq n$.

Entonces para toda $\vec{x} \in S$,

$$\begin{aligned}
&|D^r f(\vec{c})(\vec{x}, \ldots, \vec{x}) - D^r f(\vec{x}_0)(\vec{x}, \ldots, \vec{x})| = \\
&= \left| \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_r=1}^{n} \left(\frac{\partial^r f(\vec{c})}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_r}} - \frac{\partial^r f(\vec{x}_0)}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_r}} \right) x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_r} \right| \leq \\
&\leq \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_r=1}^{n} \left| \frac{\partial^r f(\vec{c})}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_r}} - \frac{\partial^r f(\vec{x}_0)}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_r}} \right| |x_{i_1}| \cdots |x_{i_r}| \leq \\
&\leq \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_r=1}^{n} -\frac{m}{2n^r} \| \underbrace{\vec{x}}_{\in S} \|^r = \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_r=1}^{n} -\frac{m}{2n^r} \cdot 1 = -\frac{m}{2n^r} \cdot n^r = -\frac{m}{2}
\end{aligned}$$

para toda $\vec{c}$ tal que $\|\vec{c}-\vec{x}_0\| < \delta$. Por lo tanto para toda $\vec{c}$ tal que $\|\vec{c}-\vec{x}_0\| < \delta$ y para toda $\vec{x} \in S$, se tiene que

$$D^r f(\vec{c})(\vec{x}, \vec{x}, \ldots, \vec{x}) - D^r f(\vec{x}_0)(\vec{x}, \ldots, \vec{x}) \leq -\frac{m}{2}$$

por lo que

$$D^r f(\vec{c})(\vec{x}, \ldots, \vec{x}) \leq -\frac{m}{2} + D^r f(\vec{x}_0)(\vec{x}, \ldots, \vec{x}) \leq -\frac{m}{2} + m = \frac{m}{2}.$$

Consideremos ahora el desarrollo de Taylor de orden $r-1$ de f en $\vec{x}_0$ para $\vec{\omega} \in B(\vec{x}_0, \delta)$. Existe $\vec{c} \in [\vec{x}_0, \vec{\omega}] \subseteq B(\vec{x}_0, \delta)$ tal que

$$f(\vec{\omega}) = f(\vec{x}_0) + \sum_{k=1}^{r-1} \frac{1}{k!} \underbrace{D^k f(\vec{x}_0)}_{\substack{\| \\ 0}} (\vec{\omega} - \vec{x}_0)^k + \frac{1}{r!} D^r f(\vec{c})(\vec{\omega} - \vec{x}_0)^r.$$

Sea $\vec{\omega} \neq \vec{x}_0$:

$$\begin{aligned} f(\vec{\omega}) - f(\vec{x}_0) &= \frac{1}{r!} D^r f(\vec{c}) \left(\frac{\vec{\omega} - \vec{x}_0}{\|\vec{\omega} - \vec{x}_0\|} \right)^r \|\vec{\omega} - \vec{x}_0\|^r \leq \\ &\leq \frac{1}{r!} \cdot \frac{m}{2} \|\vec{\omega} - \vec{x}_0\|^r < 0 \end{aligned}$$

pues $\dfrac{\vec{\omega} - \vec{x}_0}{\|\vec{\omega} - \vec{x}_0\|} \in S$. Por lo tanto $f(\vec{\omega}) - f(\vec{x}_0) < 0$. Se sigue que $f(\vec{\omega}) < f(\vec{x}_0)$ para toda $\vec{\omega} \in B(\vec{x}_0, S) \setminus \{\vec{x}_0\}$. Esto prueba que $\vec{x}_0$ es máximo local.

ii).- Si $D^r f(\vec{x}_0)(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}) > 0$, consideremos $g = -f$. Por lo tanto $D^r f = -D^r f$ y $\vec{x}_0$ es máximo local para g. Por lo tanto:

$$\begin{array}{ccc} g(\vec{\omega}) & < & g(\vec{x}_0) \\ \| & & \| \\ -f(\vec{\omega}) & < & -f(\vec{x}_0) \end{array} \qquad \text{para toda} \quad \vec{\omega} \in B(\vec{x}_0, \delta) \setminus \{\vec{x}_0\}.$$

Se sigue que $f(\vec{x}_0) < f(\vec{\omega})$ para toda $\vec{\omega} \in B(\vec{x}_0, \delta) \setminus \{\vec{x}_0\}$ y $\vec{x}_0$ es un mínimo local. ❏

Ejemplos 6.3.14

(1).- Sea $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$, hallemos los máximos y mínimos de f.

Los puntos críticos de la función son:

$$\left. \begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x - y = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -x + 2y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = \dfrac{y}{2} \\ x = 2y \end{array} \right\} \Rightarrow 2y = \frac{y}{2}.$$

Por lo tanto $y = 0 = x$.

Ahora $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 2$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = -1$.

Por lo tanto el hessiano es:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ahora $\det A_1 = 2 > 0$, $\det A = 4 - 1 = 3 > 0$, por lo que $D^2 f(0,0)$ es positiva definida. Se sigue que $(0,0)$ es un mínimo local.

(2).- Se tiene que $(0,0)$ es punto crítico de $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 + 6$, determinemos su naturaleza. Se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 2.$$

Por lo tanto el hessiano es

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{l} \Delta_1 = \det A_1 = 2 > 0 \\ \Delta_2 = \det A_2 = \det A = 0 \end{array}.$$

Por lo tanto A es positiva semidefinida, por lo que el criterio falla.

Se tiene $f(x,y) = (x+y)^2 + 6 \geq 6$ para toda (x,y) y $f(0,0) = 6$. Por lo tanto $(0,0)$ es un mínimo local y global.

(3).- Sea $f(x,y,z) = x \operatorname{sen} z + z \operatorname{sen} y$. Entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \operatorname{sen} z; \quad \frac{\partial z}{\partial y}(x,y,z) = z \cos y; \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = x \cos z + \operatorname{sen} y.$$

Si $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0$, entonces $\operatorname{sen} z = 0$. Por lo tanto $z = n\pi$ con $n \in \mathbb{Z}$.

<u>Si $z \neq 0$</u>: $z \cos y = 0$, entonces $\cos y = 0$. Por lo tanto $y = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. También se tiene

$$x \cos z + \operatorname{sen} y = x \cos n\pi + \operatorname{sen} y = (-1)^n x + \operatorname{sen} y = 0; \ (-1)^n x + (-1)^k = 0,$$

por lo que $x = \pm 1$. De hecho $x = (-1)^{k+1-n}$.

<u>Si $z = 0$</u>: $x \cos 0 + \operatorname{sen} y = 0$ por lo que $x = -\operatorname{sen} y$.

Un punto crítico es: $\left(1, \dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$ $(k = 0, n = 1)$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -z \operatorname{sen} y; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -x \operatorname{sen} z;$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \cos z; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \cos y.$$

Por lo tanto el hessiano en $\left(1, \dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$ de f es:

$$H_{(1,\frac{\pi}{2},\pi)} f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -\pi & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se sigue que la forma cuadrática es: $-2xz - \pi y^2 = D^2 f\left(1, \dfrac{\pi}{2}, \pi\right)((x, y, z))^2$ la cual no es ni positiva ni negativa semidefinida. Por lo tanto $\left(1, \dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$ es un punto silla.

(4).- Sea $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, la función $f(x_1, \ldots, x_p) = e^{-(x_1^2 + \cdots + x_p^2)}$. Ahora bien se tiene que

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{x}) = -2x_k e^{-(x_1^2 + \cdots + x_p^2)}, \quad k = 1, 2, \ldots p.$$

Por lo tanto $Df(\vec{x}) = 0 \iff \vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_p) = \vec{0}$. Se sigue que $\vec{0}$ es el único punto crítico de f. Se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}(\vec{x}) &= -2e^{-(x_1^2 + \cdots + x_p^2)} + 4x_k^2 e^{-(x_1^2 + \cdots + x_p^2)}, \quad k = 1, 2, \ldots, p; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\vec{x}) &= -4x_k x_j e^{-(x_1^2 + \cdots + x_p^2)} \quad \text{para} \quad j \neq k. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}(\vec{0}) = -2, \ k = 1, \ldots, p \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\vec{0}) = 0 \quad \text{para} j \neq k.$$

Por lo tanto

$$H_{\vec{0}} f = \begin{bmatrix} -2 & & & \\ & -2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & -2 \end{bmatrix} = \operatorname{diag}\{-2, -2, \ldots, -2\}.$$

Se sigue que $\Delta_{2\ell} = \det A_{2\ell} = (-2)^{2\ell} = 2^{2\ell} > 0$, $\Delta_{2\ell+1} = \det A_{2\ell+1} = (-2)^{2\ell+1} = -2^{2\ell+1} < 0$. Por lo tanto $H_{\vec{0}} f$ es negativa definida. Así $\vec{0}$ es un máximo local de f.

6.4 Ejercicios

1) a) Encontrar $\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2}$ si $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

   b) Calcular $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$ si $u = x^\alpha y^\beta z^\gamma$.

   c) Hallar $f_{xx}(0,0)$, $f_{xy}(0,0)$ y $f_{yy}(0,0)$ si $f(x,y) = (1+x)^m(1+y)^n$.

2) a) Encontrar $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ si $u = f(x,y,z)$, donde $z = \varphi(x,y)$.

   b) Hallar $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ si $z = f(u,v)$, $u = x^2 + y^2$ y $v = xy$.

   c) Calcular $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ si $z = f(u,v)$, donde $u = \varphi(x,y)$ y $v = \psi(x,y)$.

3) Demuestre que $\nabla^2 u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ donde u es la función

   a) $u = \arctan \dfrac{y}{x}$;

   b) $u = \log \dfrac{1}{r}$, $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$.

4) Probar que la función $z = f(x + \varphi(y))$ satisface la ecuación

$$\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

5) Encontrar la forma de la función $u = u(x,y)$ que satisface la ecuación:

   a) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$;

   b) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$.

6) Considerar la función $u(x,t) = \varphi(x - at) + \psi(x + at)$, donde φ, ψ son funciones de clase C^2. Probar que $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

7) Verificar la igualdad $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ para la función f dada por:

   a) $f(x,y) = yx^2(\cos y^2)$;

b) $f(x,y) = (e^{x^2+y^2})xy^2$.

8) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función

$$f(x,y) = \begin{cases} y\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq \vec{0} \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = \vec{0} \end{cases}.$$

Calcular, cuando existan, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$.

9) a) Encontrar $D^2 f$ donde:

i).- $f(x,y) = e^{xy}$;

ii).- $f(x,y) = \varphi(t)$, $t = x^2 + y^2$;

iii).- $f(x,y) = u^v$, $u = \dfrac{x}{y}$ $v = xy$.

b) Calcular $D^3 f$, donde

i).- $f(x,y) = e^x \cos y$;

ii).- $f(x,y) = x \cos y + y \operatorname{sen} x$.

10) Calcular $Df(1,2)$ y $D^2 f(1,2)$ si $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y$.

11) Encontrar $D^2 f(0,0,0)((x,y,z))^2$ si $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xy + 4xz + 2yz$. Calcular también $D^2 f$.

12) Obtener la fórmula de Taylor de segundo orden para

a) $f(x,y) = \operatorname{sen}(x + 2y)$ alrededor de $(0,0)$.

b) $f(x,y) = e^x \cos y$ alrededor de $(0,0)$.

13) Obtener la fórmula de Taylor de tercer orden para

a) $f(x,y) = e^{x+y}$ alrededor de $(2,3)$.

b) $f(x,y) = e^{(x-1)^2} \cos y$ alrededor de $(1,0)$.

14) Aplicando la fórmula de Taylor hasta el segundo orden, calcular aproximadamente:

a) $\sqrt{1.03}$;

b) $\sqrt[3]{0.98}$;

c) $(0.95)^{2.01}$.

15) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

Demostrar que f es de clase C^∞ pero que no es analítica.

16) Determinar la naturaleza de los puntos críticos que se dan de las siguientes funciones

a) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2 + xyz; \quad (0,0,0).$
b) $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 - 1; \quad (0,0).$

17) Hallar los puntos críticos de las siguientes funciones y determinar la naturaleza de los mismos:

a) $f(x,y) = 4(x-y) - x^2 - y^2.$
b) $f(x,y) = \operatorname{sen} x + y^2 - 2y + 1.$
c) $f(x,y,z) = (x+y+z)^2.$
d) $f(x,y,z) = \cos 2x \operatorname{sen} y + z^2.$

18) Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ y sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2. Se supone que f tiene un punto crítico en $\vec{x}_0 \in \mathring{A}$. Sea

$$\Delta := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{x}_0) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\vec{x}_0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\vec{x}_0) \right)^2 .$$

Entonces:

a) Si $\Delta > 0$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{x}_0) > 0$ entonces f tiene mínimo local en $\vec{x}_0$.
b) Si $\Delta > 0$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\vec{x}_0) < 0$ entonces f tiene un máximo local en $\vec{x}_0$.
c) Si $\Delta < 0$ entonces $\vec{x}_0$ es un punto silla de f.

19) Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ y sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2. Sea $\vec{x}_0 \in \mathring{A}$ un punto crítico de f. Sea $\Delta = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{x}_0) \cdot \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\vec{x}_0) - \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\vec{x}_0) \right)^2$.

a) Sea $f(x,y) = x^4 + y^4$. Mostrar que $\vec{x}_0 = (0,0)$ es un mínimo de f y $\Delta = 0$.
b) Sea $f(x,y) = -x^4 - y^4$. Probar que $\vec{x}_0 = (0,0)$ es un máximo de f y $\Delta = 0$.

c) Sea $f(x,y) = x^4 - y^4$. Demostrar que $\vec{x}_0 = (0,0)$ es un punto silla de f y $\Delta = 0$.

20) a) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función $f(x,y) = x^3 + y^3 - 6xy - 39x + 18y + 20$. Probar que la función tiene un mínimo local en $(5,6)$.

b) Sea $f : \mathbb{R}^2 \setminus L \to \mathbb{R}$, donde $L = \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\} \cup \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$, la función $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + \dfrac{a^3}{x} + \dfrac{a^3}{y}$, donde $a \neq 0$.

Probar que f es de clase C^∞ en su dominio y que tiene un mínimo local en $\left(\dfrac{a}{\sqrt[3]{3}}, \dfrac{a}{\sqrt[3]{3}}\right)$.

21) Una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^2 tiene un máximo local en (x_0, y_0). Supongamos que f es armónica, es decir, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$. Probar que todas las segundas parciales de f se anulan en (x_0, y_0).

Capítulo 7

Funciones inversas e implícitas

7.1 Teorema de la Función Inversa

Si tenemos una función $f : [a,b] \to [c,d]$ de una variable que es biyectiva, continua y además diferenciable en un punto $\vec{x}_0 \in (a,b)$ con $f'(\vec{x}_0) \neq 0$, entonces la función $f^{-1} : [c,d] \to [a,b]$ es diferenciable en $y_0 = f(x_0) \in (c,d)$ y se tiene

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Los que nos proponemos en esta sección es demostrar este mismo teorema en n-variables.

Empezamos con el siguiente

Lema 7.1.1 *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto convexo y sea $f\colon A \to \mathbb{R}^n$ una función de clase C^1. Supongamos que existe $M > 0$ tal que $\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{z})\right| \leq M$ para toda $\vec{z} \in A$, donde $f = (f_1, \ldots, f_n)$. Entonces $\|f(\vec{x}) - f(\vec{y})\| \leq Mn^2\|\vec{x} - \vec{y}\|$ para cualesquiera $\vec{x}, \vec{y} \in A$.*

<u>*Demostración*</u>. Aplicando el Teorema de Taylor a f_i para $1 \leq i \leq n$, se tiene que

$$f_i(\vec{y}) - f_i(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{z})(y_j - x_j)$$

para algún $\vec{z} \in [\vec{x}, \vec{y}]$. Por lo tanto

$$|f_i(\vec{y}) - f_i(\vec{x})| \leq \sum_{j=1}^{n} \left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{z}_j)\right| |y_j - x_j| \leq M \sum_{j=1}^{n} \|\vec{y} - \vec{x}\| = Mn\|\vec{y} - \vec{x}\|,$$

de donde se sigue que

$$\|f(\vec{y}) - f(\vec{x})\| \leq \sum_{i=1}^{n} |f_i(\vec{y}) - f_i(\vec{x})| \leq \sum_{i=1}^{n} nM\|\vec{y} - \vec{x}\| = Mn^2\|\vec{y} - \vec{x}\|. \qquad ❑$$

Teorema 7.1.2 (Teorema de la Función Inversa) *Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $f\colon A \to \mathbb{R}^n$ una función de clase C^q, $q \geq 1$. Sea $\vec{a} \in A$ tal que* $\det(f'(\vec{a})) = \det(Df(\vec{a})) \neq 0$. *Entonces existe un conjunto abierto V tal que $\vec{a} \in V$ y un conjunto abierto W tal que $f(\vec{a}) \in W$ con la propiedad de que $f : V \to W$ es biyectiva y $f^{-1} : W \to V$ es de clase C^q. Además, se tiene que*

$$(f^{-1})'(\vec{y}) = [f'(f^{-1}(\vec{y}))]^{-1} \quad \text{para toda} \quad \vec{y} \in W.$$

Equivalentemente,

$$Df^{-1}(\vec{y}) = [D(f^{-1}(\vec{y}))]^{-1} \quad \text{para toda} \quad \vec{y} \in W.$$

Demostración. Pongamos $\lambda = Df(\vec{a})$ la cual es no singular. Ahora bien, λ por ser transformación lineal es de clase C^∞. Si suponemos que el teorema ha sido probado para $\lambda^{-1}\circ f$, entonces si g es la inversa de $\lambda^{-1}\circ f$, g es de clase C^q y se tiene que $g\circ\lambda^{-1}\circ f = \mathrm{Id}_{V_1}$, $\lambda^{-1} \circ f \circ g = \mathrm{Id}_{W_1}$, por lo que $f \circ g \circ \lambda^{-1} = \lambda \circ \mathrm{Id}_{W_1} \circ\lambda^{-1} = \mathrm{Id}_{\lambda(W_1)}$ y V_1, W_1, $\lambda(W_1)$ son conjuntos abiertos. Se sigue que $g \circ \lambda^{-1}$ es la inversa de f y es de clase C^q.

Además $D(\lambda^{-1} \circ f)(\vec{a}) = D\lambda^{-1}(f(\vec{a})) \circ Df(\vec{a}) = \lambda^{-1} \circ \lambda = \mathrm{Id}$.

Por lo anterior, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $Df(\vec{a}) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} = \lambda$.

Ahora si $f(\vec{a} + \vec{h}) = f(\vec{a})$ se tiene que $\dfrac{\|f(\vec{a} + \vec{h}) - f(\vec{a}) - \lambda(\vec{h})\|}{\|\vec{h}\|} = \dfrac{\|\vec{h}\|}{\|\vec{h}\|} = 1$, pero

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{\|f(\vec{a} + \vec{h}) - f(\vec{a}) - \lambda(\vec{h})\|}{\|\vec{h}\|} = 0$$

por lo que existe una vecindad abierta $U_1 = B(\vec{a}, \delta_1) \ni \vec{a}$, tal que $f(\vec{x}) \neq f(\vec{a})$ para toda $\vec{x} \in U$.

Ahora, puesto que f es de clase C^1, Df es continua en $\vec{a}$ y $\det Df(\vec{a}) \neq 0$. Por lo tanto existe otro abierto $U_2 = B(\vec{a}, \delta_2) \ni \vec{a}$ tal que $\det Df(\vec{x}) \neq 0$ para toda $\vec{x} \in U_2$.

Más aún, puesto que $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{x})$ es continua en $\vec{a}$, existe $\delta_3 > 0$ tal que para toda $\vec{x} \in B(\vec{a}, \delta_3)$,

$$\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{x}) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{a})\right| < \frac{1}{2n^2}$$

para toda $1 \leq i \leq n$ y para toda $1 \leq j \leq n$. Notemos que $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{a}) = \delta_{ij}$. Sea $\delta = \dfrac{1}{2}\min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\} > 0$ y sea $U = B(\vec{a}, \delta)$.

Se tiene:

(1).- $f(\vec{x}) \neq f(\vec{a})$ para toda $\vec{x} \in U$, $\vec{x} \neq \vec{a}$.

(2).- $\det(Df(\vec{x})) \neq 0$ para toda $\vec{x} \in U$.

(3).- $\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{x}) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{a})\right| < \frac{1}{2n^2}$ para toda $\vec{x} \in U$, $1 \leq i, j \leq n$.

Aplicamos el lema anterior a $g(\vec{x}) = f(\vec{x}) - \vec{x}$, esto es, $g_i(\vec{x}) = f_i(\vec{x}) - x_i$ y $\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\vec{x}) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{x}) - \delta_{ij}$. Por lo tanto

$$\left|\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\vec{x})\right| = \left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{x}) - \delta_{ij}\right| = \left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{x}) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{a})\right| < \frac{1}{2n^2}$$

Se sigue que, para toda $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in U$, se tiene

$$\|g(\vec{x}_1) - g(\vec{x}_2)\| = \|(f(\vec{x}_1) - \vec{x}_1) - (f(\vec{x}_2)) - \vec{x}_2)\| \leq$$
$$\leq \frac{1}{2n^2} \cdot n^2 \|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\| = \frac{1}{2}\|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\|.$$

Por lo tanto

$$\|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\| - \|f(\vec{x}_1) - f(\vec{x}_2)\| \leq \|f(\vec{x}_1) - \vec{x}_1 - f(\vec{x}_2) + \vec{x}_2\| =$$
$$= \|g(\vec{x}_1) - g(\vec{x}_2)\| \leq \frac{1}{2}\|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\|.$$

Se sigue que

(4).- $\|f(\vec{x}_1) - f(\vec{x}_2)| \geq \frac{1}{2}\|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\|$ para toda $x_1, \vec{x}_2 \in U$.

Se tiene que $\operatorname{Fr} U = \partial U = S(\vec{a}, \delta)$, la esfera con centro en $\vec{a}$ y radio δ. Se tiene que ∂U es compacto por lo que $f(\partial U)$ es compacto y $f(\vec{x}) \neq f(\vec{a})$ para toda $\vec{x} \in \partial U$. Por lo tanto, existe $d > 0$ tal que $\|f(\vec{x}) - f(\vec{a})\| \geq d$ para toda $\vec{x} \in \partial U$.

Sea $W = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^n \mid \|y - f(\vec{a})\| < d/2\} = B(f(\vec{a}), d/2)$.

Si $\vec{y} \in W$, $\vec{x} \in \partial U$ y se tiene:

(5).- $\|\vec{y} - f(\vec{a})\| < \frac{d}{2} \leq \|\vec{y} - f(\vec{x})\|$. Por lo tanto

$$\|\vec{y} - f(\vec{a})\| < \|\vec{y} - f(\vec{x})\| \quad \text{para toda} \quad \vec{y} \in W,\ \vec{x} \in \partial U.$$

Se quiere probar ahora que para cada $\vec{y} \in W$, existe un único $\vec{x} \in \mathring{U}$ tal que $f(\vec{x}) = \vec{y}$. Sea $\vec{y} \in W$ y sea $g\colon U \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(\vec{x}) = \|\vec{y} - f(\vec{x})\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (y^i - f_i(\vec{x}))^2.$$

Se tiene que g es continua y $g(\vec{x}) \geq 0$ para toda $\vec{x} \in U$. Por lo tanto, existe $\vec{x} \in U$ en el cual g toma el valor mínimo.

Si $\vec{x} \in \partial U$, por (5) se tiene que $\|\vec{y} - f(\vec{a})\| < \|\vec{y} - f(\vec{x})\|$. Por lo tanto $g(\vec{a}) < g(\vec{x})$. Recordemos que U es compacto pues $U = \overline{B}(\vec{a}, \delta)$, por lo que $\vec{x} \in U \setminus \partial U = \mathring{U}$.

Como $\vec{x} \in \mathring{U}$ es el mínimo de la función g, entonces $\dfrac{\partial g}{\partial x_j}(\vec{x}) = 0$ para toda $1 \leq j \leq n$ y

$$\frac{\partial g}{\partial x_j}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} -2(y_i - f^i(\vec{x})) \cdot \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{x}) = 0 \quad \text{para toda} \quad 1 \leq j \leq n.$$

Matricialmente, esto significa:

$$[Df(\vec{x})] \begin{pmatrix} y_1 - f_1(\vec{x}) \\ y_2 - f_2(\vec{x}) \\ \vdots \\ y_n - f_n(\vec{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por (2) se tiene $\det Df(\vec{x}) \neq 0$ y por tanto (multiplicando por $[Df(\vec{x})]^{-1}$) se tiene que:

$$\begin{pmatrix} y_1 - f_1(\vec{x}) \\ y_2 - f_2(\vec{x}) \\ \vdots \\ y_n - f_n(\vec{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

esto es, $f_i(\vec{x}) = y_i$, $1 \leq i \leq n$. Por lo tanto $f(\vec{x}) = \vec{y}$.

Veamos que tal $\vec{x}$ es único. Si hubiese otro $\vec{x}_2 \in U$ tal que $f(\vec{x}_2) = \vec{y}$, se tiene por (4) que $\|f(\vec{x}_1) - f(\vec{x}_2)\| = \|\vec{y} - \vec{y}\| = 0 \geq \dfrac{1}{2}\|\vec{x} - \vec{x}_2\|$. Por lo tanto $\vec{x} = \vec{x}_2$.

Ahora sea $V = \mathring{U} \cap f^{-1}(W)$, V es un conjunto abierto, $f : V \to W$ es biyectiva y por tanto $f^{-1} \colon W \to V$ existe.

Veamos que f^{-1} es continua.

Sean $\vec{y}_1, \vec{y}_2 \in W$, $f(\vec{x}_1) = \vec{y}_1$, $f(\vec{x}_2) = \vec{y}_2$. Por lo tanto $f^{-1}(\vec{y}_1) = \vec{x}_1$ y $f^{-1}(\vec{y}_2) = \vec{x}_2$. Nuevamente por (4), se sigue que $2\|f(\vec{x}_1) - f(\vec{x}_2)\| \geq \|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\|$. Esto implica que $\|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\| = \|f^{-1}(\vec{y}_1) - f^{-1}(\vec{y}_2)\| \leq 2\|\vec{y}_1 - \vec{y}_2\| = 2\|f(\vec{x}_1) - f(\vec{x}_2)\|$ para toda $\vec{y}_1, \vec{y}_2 \in W$. Por lo tanto f^{-1} es continua en W.

Probemos ahora que f^{-1} es diferenciable.

Sea $\mu = Df(\vec{x}_0)$. Queremos probar que f^{-1} es diferenciable en $\vec{y}_0 = f(\vec{x}_0)$ y que $Df^{-1}(\vec{y}_0) = \mu^{-1}$.

Sea $\varphi(\vec{x}) = f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) - \mu(\vec{x} - \vec{x}_0)$. Entonces se tiene

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \mu(\vec{x} - \vec{x}_0) + \varphi(\vec{x})$$

con $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \dfrac{\|\varphi(\vec{x})\|}{\|\vec{x}-\vec{x}_0\|} = 0$.

Despejando, se tendrá que $\mu^{-1}(f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)) = \vec{x} - \vec{x}_0 + \mu^{-1}(\varphi(\vec{x}))$. Ahora bien, poniendo $f(\vec{x}) = \vec{y}$ y $f(\vec{x}_0) = \vec{y}_0$, se tiene $\mu^{-1}(\vec{y}-\vec{y}_0) = f^{-1}(\vec{y}) - f^{-1}(\vec{y}_0) + \mu^{-1}(\varphi(f^{-1}(\vec{y})))$. Por lo tanto

$$f^{-1}(\vec{y}) = f^{-1}(\vec{y}_0) + \mu^{-1}(\vec{y}-\vec{y}_0) - \mu^{-1}(\varphi(f^{-1}(\vec{y})))$$

y μ^{-1} es lineal. Así, falta probar que $\lim\limits_{\vec{y}\to\vec{y}_0} \dfrac{\|-\mu^{-1}(\varphi(f^{-1}(\vec{y})))\|}{\|\vec{y}-\vec{y}_0\|} = 0$.

Por ser μ^{-1} transformación lineal se tiene que existe $M > 0$ tal que $\|\mu^{-1}(\varphi(f^{-1}(\vec{y})))\| \leq M\|\varphi(f^{-1}(\vec{y}))\|$.

Ahora

$$\frac{\|\varphi(f^{-1}(\vec{y}))\|}{\|\vec{y}-\vec{y}_0\|} = \frac{\|\varphi(\overbrace{f^{-1}(\vec{y})}^{\vec{x}})\|}{\|\underbrace{f^{-1}(\vec{y})}_{\vec{x}} - \underbrace{f^{-1}(\vec{y}_0)}_{\vec{x}_0}\|} \cdot \underbrace{\frac{\|f^{-1}(\vec{y}) - f^{-1}(\vec{y}_0)\|}{\|\vec{y}-\vec{y}_0\|}}_{\substack{\leq 2 \\ \text{(por lo anterior)}}} \leq$$

$$\leq \frac{\|\varphi(\vec{x})\|}{\|\vec{x}-\vec{x}_0\|} \cdot 2 \xrightarrow[\vec{x}\to\vec{x}_0]{} 0.$$

Por lo tanto

$$\lim_{\vec{y}-\vec{y}_0} \frac{\|\mu^{-1}(\varphi(f^{-1}(\vec{y})))\|}{\|\vec{y}-\vec{y}_0\|} \leq \lim_{\vec{y}-\vec{y}_0} \frac{M\|\varphi(f^{-1}(\vec{y}))\|}{\|\vec{y}-\vec{y}_0\|} = 0.$$

Se sigue que f^{-1} es diferenciable en $\vec{y}_0$ y $Df(\vec{y}_0) = \mu^{-1}$.

Ahora para ver que f^{-1} es de clase C^q, pongamos $f(\vec{x}) = \vec{y}$, $f^{-1}(\vec{y}) = \vec{x}$, $f =$

$(f_1,\dots,f_n)$, $f^{-1}=(g_1,\dots,g_n)$, entonces:

$$Df(\vec{x})=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x}) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_j}(\vec{x}) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{x}) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_i}{\partial x_1}(\vec{x}) & \cdots & \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{x}) & \cdots & \dfrac{\partial f_i}{\partial x_n}(\vec{x}) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}(\vec{x}) & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_j}(\vec{x}) & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}(\vec{x}) \end{bmatrix}=J;$$

$$Df^{-1}(\vec{y})=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial y_1}(\vec{y}) & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial y_j}(\vec{y}) & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial y_n}(\vec{y}) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial g_i}{\partial y_1}(\vec{y}) & \cdots & \dfrac{\partial g_i}{\partial y_j}(\vec{y}) & \cdots & \dfrac{\partial g_i}{\partial y_n}(\vec{y}) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial g_n}{\partial y_1}(\vec{y}) & \cdots & \dfrac{\partial g_n}{\partial y_j}(\vec{y}) & \cdots & \dfrac{\partial g_n}{\partial y_n}(\vec{y}) \end{bmatrix}=J^{-1} \quad \text{con}$$

$$\frac{\partial g_i}{\partial y_i}(\vec{y})=\frac{(-1)^{i+j}\det\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x}) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_{j-1}}(\vec{x}) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_{j+1}}(\vec{x}) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{x}) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \dfrac{\partial f_{i-1}}{\partial x_1}(\vec{x}) & \cdots & \dfrac{\partial f_{i-1}}{\partial x_{j-1}}(\vec{x}) & \dfrac{\partial f_{i-1}}{\partial x_{j+1}}(\vec{x}) & \cdots & \dfrac{\partial f_{i-1}}{\partial x_n}(\vec{x}) \\ \dfrac{\partial f_{i+1}}{\partial x_1}(\vec{x}) & \cdots & \dfrac{\partial f_{i+1}}{\partial x_{j-1}}(\vec{x}) & \dfrac{\partial f_{i+1}}{\partial x_{j+1}}(x) & \cdots & \dfrac{\partial f_{i+1}}{\partial x_n}(\vec{x}) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}(\vec{x}) & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_{j-1}}(\vec{x}) & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_{j+1}}(\vec{x}) & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}(\vec{x}) \end{bmatrix}}{\det\left(Df(\vec{x})\right)}=$$

$$=\frac{h(\vec{x})}{\det Df(\vec{x}))}=\frac{h(f^{-1}(\vec{y}))}{\ell(f^{-1}(\vec{y}))},$$

donde h y ℓ son funciones que se definen a partir de lo de arriba.

Ahora bien h y ℓ son productos y sumas de $\dfrac{\partial f_r}{\partial x_s}(f^{-1}(\vec{y}))$ que es de clase C^1. Por lo tanto $Df^{-1}(\vec{y})$ será diferenciable. Al calcular $D^2f^{-1}(\vec{y})$ obtendríamos derivadas parciales que serían sumas y productos de $\dfrac{\partial^2 f_r}{\partial x_s \partial x_t}(f^{-1}(\vec{y}))$, etc. Continuando así se llegaría a que todas las derivadas parciales de orden q de f^{-1} existirían y serán continuas en W. Por lo tanto f^{-1} es de clase C^q. ❑

Observaciones 7.1.3

(1).- Puede suceder que f^{-1} exista aún cuando $\det(f'(\vec{a})) = 0$. Por ejemplo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, $f'(0) = 3(0)^2 = 0$ y $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

(2).- Si $\det f'(\vec{a}) = 0$, entonces f^{-1} no puede ser diferenciable en caso de existir pues se tiene: $(f^{-1} \circ f)(\vec{x}) = \mathrm{Id}(\vec{x})$, por lo que $D(f^{-1} \circ f)(\vec{a}) = Df^{-1}(f(a)) \circ Df(\vec{a}) = D\,\mathrm{Id} = \mathrm{Id}$.

Por lo tanto $\det[D(f^{-1} \circ f)(\vec{a})] = \det(Df^{-1}(f(a)))\det(Df(\vec{a})) = \det \mathrm{Id} = 1 \neq 0$.

Se sigue que $\det Df(\vec{a})$ debe ser diferente de cero para que f^{-1} sea diferenciable en $f(\vec{a}))$.

Copiando una gran parte de la demostración del Teorema de la Función Inversa, se puede demostrar el siguiente resultado, cuya demostración se deja de ejercicio.

Teorema 7.1.4 (Teorema del Mapeo Abierto) *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y sea $f : A \to \mathbb{R}^n$ una función inyectiva tal que $\det Df(\vec{x}) \neq 0$ para toda $\vec{x} \in A$. Entonces $f(A)$ es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$ y la función $f^{-1} : f(A) \to A$ es diferenciable. Además se tiene que para todo subconjunto $B \subseteq A$, abierto, $f(B)$ es un conjunto abierto.* ❏

Ejemplos 7.1.5

(1).- Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la función $f(x, y) = (u, v) = \left(\dfrac{x^4 + y^4}{x}, \operatorname{sen} x + \cos y\right)$.

Se quieren encontrar puntos (x_0, y_0) tales que en una vecidad de ellos se puede poner x y y en función de u y v. Sea

$$J = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \det Df = \det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial v} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \dfrac{3x^4 - y^4}{x^2} & \dfrac{4y^3}{x} \\ \cos x & -\operatorname{sen} y \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen} y}{x^2}(y^4 - 3x^4) - \frac{4y^3}{x}\cos x.$$

Por lo tanto $J \neq 0 \iff \operatorname{sen} y(y^4 - 3x^4) \neq 4x^3 \cos x \ (x \neq 0)$.

Por ejemplo sea $(x_0, y_0) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Entonces existen una vecindad V de (x_0, y_0) y otra vecindad W de (u_0, v_0), donde $f(x_0, y_0) = (u_0, v_0)$, tales que existe $f^{-1} \colon W \to V$ y f^{-1} es de clase C^∞ (pues f lo es) y por lo tanto en esa vecindad se pueden despejar x y y en términos de u y v.

Además:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\left(\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right)} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial v}{\partial y} & -\dfrac{\partial u}{\partial y} \\ -\dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial x} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{x^2}{\operatorname{sen} y(y^4 - 3x^4) - 4xy^3 \cos x} \begin{bmatrix} -\operatorname{sen} y & \dfrac{-4y^3}{x} \\ -\cos x & \dfrac{3x^4 - y^4}{x^3} \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{-x^2 \operatorname{sen} y}{\operatorname{sen} y(y^4 - 3x^4) - 4xy^3 \cos x}; \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{-4xy^3}{\operatorname{sen} y(y^4 - 3x^4) - 4xy^3 \cos x};$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{-x^2 \cos x}{\operatorname{sen} y(y^4 - 3x^4) - 4xy^3 \cos x}; \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{3x^4 - y^4}{\operatorname{sen} y(y^4 - 3x^4) - 4xy^3 \cos x}.$$

(2).- Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x,y) = (u,v) = (e^{x+y}, e^{3x-y})$.

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{x+y} & e^{x+y} \\ 3e^{3x-y} & -e^{3x-y} \end{bmatrix},$$

$$\det J = e^{x+y}(-e^{3x-y} - 3e^{3x-y}) = -4e^{x+y}e^{3x-y} \neq 0 \quad \text{para toda} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Sean $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ y $f(x_0, y_0) = (u_0, v_0)$. Existen abiertos V de (x_0, y_0), W de (u_0, v_0) tales que $f : V \to W$ y $f^{-1} : W \to V$ son de clase C^∞.

Se tiene:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{x+y} & e^{x+y} \\ 3e^{3x-y} & -e^{3x-y} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-4e^{x+y}e^{3x-y}} \begin{bmatrix} -e^{3x-y} & -e^{x+y} \\ -3e^{3x-y} & e^{x+y} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} e^{-x-y} & e^{y-3x} \\ 3e^{-x-y} & -e^{y-3x} \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{4} e^{-x-y}; \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{1}{4} e^{y-3x}; \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{3}{4} e^{-x-y}; \quad \frac{\partial y}{\partial v} = -\frac{1}{4} e^{y-3x}.$$

Para el cálculo de derivadas de orden mayor, tenemos

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{4}e^{-x-y}\right) = \frac{1}{4}e^{-x-y}\frac{\partial(-x-y)}{\partial u} =$$

$$= -\frac{1}{4}e^{-x-y}\left\{\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial u}\right\} = -\frac{1}{4}e^{-x-y}\left\{\frac{1}{4}e^{-x-y} + \frac{3}{4}e^{-x-y}\right\} = -\frac{1}{4}e^{-2(x+y)};$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u} = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{4}e^{-x-y}\right) = -\frac{1}{4}e^{-x-y}\left\{\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial v}\right\} =$$

$$= -\frac{1}{4}e^{-x-y}\left\{\frac{1}{4}e^{y-3x} - \frac{1}{4}e^{y-3x}\right\} = 0.$$

Para verificar lo anterior procedemos directamente, es decir:

$$\left.\begin{array}{l} u = e^{x+y} \\ v = e^{3x-y} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x + y = \ln u \\ 3x - y = \ln v \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{rcl} x & = & \dfrac{\ln u + \ln v}{4} \\ y & = & \dfrac{3\ln u - \ln v}{4} \end{array}$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{u}; \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{v}; \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{u}; \quad \frac{\partial y}{\partial v} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{v};$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = -\frac{1}{4u^2}; \quad \frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u} = 0.$$

(3).- Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy) = (u, v)$.

Se tiene que f no es globalmente invertible, es decir no existe $f^{-1} : f(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}^2$, pues f no es $1-1$ debido a que $f(-x, -y) = f(x, y)$ para toda $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Sin embargo f es localmente invertible para toda $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, pues

$$J|_{(x_0,y_0)} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_0 & -2y_0 \\ 2y_0 & 2x_0 \end{bmatrix} = 4(x_0^2 + y_0^2) \neq 0.$$

(4).- Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la función $f(x, y) = (u, v)$, donde $u(x, y) = x^3 + 2xy + y^2$; $v(x, y) = x^2 + y$. ¿Es f localmente invertible en $(x, y) = (1, 1)$? Calcular aproximadamente $f^{-1}(4.1, 1.8)$.

<u>**Solución:**</u> f es de clase C^∞ en $\mathbb{R}^2$ y se tiene:

$$\det Df(1, 1) = \left|\begin{array}{cc} 3x^2 + 2y & 2x + 2y \\ 2x & 1 \end{array}\right|_{(1,1)} = \left|\begin{array}{cc} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{array}\right| = 5 - 8 = -3 \neq 0.$$

Por el Teorema de la Función Inversa, existen abiertos U, W tales que $(1,1) \in U$, $f(1,1) = (4,2) \in W$ y $f : U \to W$ es una biyección. Además $f^{-1} : W \to U$ es de clase C^{∞}. Se tiene

$$Df^{-1}(4,2) = [Df(1,1)]^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{5}{3} \end{bmatrix}.$$

Se sigue pues que $f^{-1}(u,v) \cong f^{-1}(4,2) + Df^{-1}(4,2)(u-4, v-2)$, para (u,v) en una cercanía de $(4,2)$. En particular

$$\begin{aligned} f^{-1}(4,1,1.8) &\cong (1,1) + \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{5}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1 \\ -0.2 \end{bmatrix} = \\ &= (1,1) + \left(-\frac{0.1}{3} - \frac{0.8}{3}, \frac{0.2}{3} + \frac{1}{3} \right) = (1,1) + \left(-\frac{0.9}{3}, \frac{1.2}{3} \right) = \\ &= (1,1) + (-0.3, 0.4) = (0.7, 1.4). \end{aligned}$$

Ahora bien, si $(u,v) = f(x,y)$, $(x,y) = f^{-1}(u,v)$, es decir x, y aparecen en términos de u, v. Se tiene:

$$\frac{\partial x}{\partial u}(4,2) = -\frac{1}{3}; \quad \frac{\partial x}{\partial v}(4,2) = \frac{4}{3}; \quad \frac{\partial y}{\partial u}(4,2) = \frac{2}{3} \quad \text{y} \quad \frac{\partial y}{\partial v}(4,2) = -\frac{5}{3}.$$

7.2 Teorema de la Función Implícita

Cuando tenemos la relación $x^2 = y^2 = 25$, se tiene, de hecho que y está en función de x.

En este caso $y = f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ ó $y = g(x) = -\sqrt{25 - x^2}$, es decir se puede "despejar y" y ponerla en función de x, aunque este mismo ejemplo muestra que f no necesariamente es única.

Más generalmente, si se tiene una ecuación $F(x,y) = 0$, uno se pregunta si se puede poner y en función x.

La respuesta general a esta pregunta nos la da el:

Teorema 7.2.1 (Teorema de la Función Implícita) *Sean $f : A \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $f \colon A \to \mathbb{R}^m$ una función de clase C^q con $q \geq 1$. Sea $(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \in A$ tal que*

$f(\vec{x}_0, \vec{y}_0) = 0$. *Sea* Δ *la matriz:*

$$\Delta = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(\vec{x}_0,\vec{y}_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y_2}(\vec{x}_0,\vec{y}_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_j}(\vec{x}_0,\vec{y}_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m}(\vec{x}_0,\vec{y}_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_i}{\partial y_1}(\vec{x}_0,\vec{y}_0) & \frac{\partial f_i}{\partial y_2}(\vec{x}_0,\vec{y}_0) & \cdots & \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(\vec{x}_0,\vec{y}_0) & \cdots & \frac{\partial f_i}{\partial y_m}(\vec{x}_0,\vec{y}_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1}(\vec{x}_0,\vec{y}_0) & \frac{\partial f_m}{\partial y_2}(\vec{x}_0,\vec{y}_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_i}(\vec{x}_0,\vec{y}_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m}(\vec{x}_0,\vec{y}_0) \end{bmatrix}$$

con $f = (f_1, \ldots, f_m)$, $(\vec{x}, \vec{y}) = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

Si $\det \Delta \neq 0$, *existen un conjunto abierto* U *de* $\mathbb{R}^n$ *tal que* $\vec{x}_0 \in U$, *un conjunto abierto* V *de* $\mathbb{R}^m$ *tal que* $\vec{y}_0 \in V$ *y una única función* $g : U \to V$ *tal que* $f(\vec{x}, g(\vec{x})) = \vec{0}$ *para toda* $\vec{x} \in U$. *Además la función es de clase* C^q *y* $g(\vec{x}_0) = \vec{y}_0$.

<u>*Demostración*</u>.

$(g(\vec{x}_0) = \vec{y}_0$ y $f(\Gamma_g) = \vec{0})$.

Sea $F : A \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ la función dada por: $F(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, f(\vec{x}, \vec{y}))$. F es de clase C^q.

El Jacobiano de F en el punto $(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$ es $\det H$, donde H:

$$\mathrm{Id}_n \longrightarrow \quad H = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \\ \hline \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} & \Delta \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} & \end{array}\right]_{(\vec{x}_0,\vec{y}_0)}$$

(columnas: n | m; filas: n | m)

Por lo tanto $\det H = \det \mathrm{Id}_n \cdot \det \Delta = 1 \cdot \det \Delta = \det \Delta \neq 0$.

Entonces, por el Teorema de la Función Inversa, se tiene que existen, un abierto $U_1 \times V_1$ que contine a $(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$ con $U_1 \subseteq \mathbb{R}^n$, $V_1, \subseteq \mathbb{R}^m$ y un abierto W_1 de $F(\vec{x}_0, \vec{y}_0) = (\vec{x}_0, \vec{0})$ tales que $F\colon U_1 \times V_1 \to W_1$ tiene una inversa h de clase C^q, $h : W_1 \to U_1 \times V_1$.

Ahora sea $h(\vec{x}, \vec{y}) = \big(\underbrace{\ell(\vec{x}, \vec{y})}_{\in\, \mathbb{R}^n}, \underbrace{k(\vec{x}, \vec{y})}_{\in\, \mathbb{R}^m}\big)$. Se tiene

$$(F \circ h)(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, \vec{y}) = (\ell(\vec{x}, \vec{y}), f(\ell(\vec{x}, \vec{y}), k(\vec{x}, \vec{y}))).$$

Por lo tanto $\ell(\vec{x},\vec{y}) = \vec{x}$. Se sigue que $h(\vec{x},\vec{y}) = (\vec{x}, k(\vec{x},\vec{y}))$ con k una fucnción de clase C^q.

Sea $\pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ la proyección $\pi(\vec{x},\vec{y}) = \vec{y}$ donde π de clase C^∞. Ahora bien $(\pi \circ F)(\vec{x},\vec{y}) = f(\vec{x},\vec{y})$.

Se tiene que $f(\vec{x}, k(\vec{x},\vec{y})) = (f \circ h)(\vec{x},\vec{y}) = (\pi \circ F \circ h)(\vec{x},\vec{y}) = \pi(\vec{x},\vec{y}) = \vec{y}$.

Definimos $g(\vec{x}) = k(\vec{x},\vec{0})$. Se tiene $f(\vec{x}, g(\vec{x})) = f(\vec{x}, k(\vec{x},\vec{0})) = \vec{0}$.

Por el Teorema de la Función Inversa, se tiene que h es única y

$$h(F(\vec{x},\vec{y})) = (\vec{x},\vec{y}) = h(\vec{x}, f(\vec{x},\vec{y})) = (\vec{x}, k(\vec{x}, f(\vec{x},\vec{y}))).$$

Se sigue que

$$k(\vec{x}, f(\vec{x},\vec{y})) = \vec{y}.$$

Por lo tanto si g_1 es tal que $f(\vec{x}, g_1(\vec{x})) = \vec{0}$, entonces

$$g_1(\vec{x}) = k(\vec{x}, f(\vec{x}, g_1(\vec{x})) = k(\vec{x},\vec{0}) = g(\vec{x}).$$

Se sigue que g es única.

Ahora, $g : U \to V_1 = V$, donde $U = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid (\vec{x},\vec{0}) \in W_1\} = U_1$ es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$.

Entonces se sigue que U es un conjunto abierto conteniendo a $\vec{x}_0$ en $\mathbb{R}^n$, V es un conjunto abierto conteniendo a $\vec{y}_0$ en $\mathbb{R}^m$, $f(\vec{x}, g(\vec{x})) = \vec{0}$ para toda $\vec{x} \in U$ y $g(\vec{x}_0) = \vec{y}_0$. ❏

Observación 7.2.2 Para calcular las derivadas de g, procedemos así:

$$\begin{array}{ccccc} U \subseteq \mathbb{R}^n & \xrightarrow{(\mathrm{Id},g)=h} & U \times V \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^m \\ \vec{x} & \longmapsto & (\vec{x}, g(\vec{x})) & \longmapsto & f(\vec{x}, g(\vec{x})) \end{array}.$$

Se tiene $(f \circ h)(\vec{x}) = f(\vec{x}, g(\vec{x})) = \vec{0}$. Por lo tanto para toda $\vec{x} \in U$, $Df(h(\vec{x})) \circ Dh(\vec{x}) = 0$.

Matricialmente tendremos:

$$m\left\{ \overbrace{\underbrace{\overbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}}^{n}}_{\substack{\uparrow \\ \text{matriz } M}} \underbrace{\overbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{bmatrix}}^{m}}_{\substack{\uparrow \\ \text{matriz } N}}}^{n+m} \right. \begin{bmatrix} \overbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{matrix}}^{\substack{\text{matriz } \mathrm{Id}_n \\ \downarrow}} \\ \hline \begin{matrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{matrix} \end{bmatrix} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{matriz} \\ m\times n}}{(0)}.$$

Es decir

$$\left[\begin{array}{ccc} M & | & N \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} \mathrm{Id}_n \\ \hline \\ \dfrac{\partial(g_1,\ldots,g_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)} \end{array}\right] = \left[M + N\frac{\partial(g_1,\ldots,g_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}\right] = [0].$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial(g_1,\ldots,g_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)} = -N^{-1}M,$$

es decir se tiene:

Corolario 7.2.3 *En el teorema de la función implícita se tiene:*

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_j} & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial g_i}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_i}{\partial x_j} & \cdots & \dfrac{\partial g_i}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial g_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_m}{\partial x_j} & \cdots & \dfrac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{(\vec{x})} =$$

$$= -\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_j} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_i}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_i}{\partial y_j} & \cdots & \dfrac{\partial f_i}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial y_j} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{bmatrix}^{-1}_{(\vec{x},g(\vec{x}))} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_j} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_i}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} & \cdots & \dfrac{\partial f_i}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_j} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial f_m} \end{bmatrix}_{(\vec{x},g(\vec{x}))} . \quad ❑$$

Ejemplos 7.2.4

(1).- Consideremos la ecuación $1 + xy - \log(e^{xy} + e^{-xy}) = 0$. Sea (x_0, y_0) tal que $x_0 \neq 0$, un punto que satisfaga a esta ecuación. Veamos que y es función implícita de x.

Consideremos $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función $F(x, y) = 1 + xy - \log(e^{xy} + e^{-xy})$, F es de clase C^∞ en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ y por hipótesis $F(x_0, y_0) = 0$.

Se tiene

$$\Delta = \left[\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)\right] = \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = x_0 - \frac{x_0 e^{x_0 y_0} - x_0 e^{-x_0 y_0}}{e^{x_0 y_0} + e^{-x_0 y_0}} =$$

$$= x_0\left[1 - \frac{e^{x_0 y_0} - e^{-x_0 y_0}}{e^{x_0 y_0} + e^{-x_0 y_0}}\right] = x_0 \frac{2e^{-x_0 y_0}}{e^{x_0 y_0} + e^{-x_0 y_0}} \neq 0 \quad \text{pues} \quad x_0 \neq 0.$$

Por el Teorema de la Función Implícita existen U, V abiertas de $\mathbb{R}$ tales que $x_0 \in U$, $y_0 \in V$ y una única función $f : U \to V$ de clase C^∞ tal que $F(x, f(x)) = 0$ para toda $x \in U$, es decir, $y = f(x)$ para toda $x \in U$.

Calculemos $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$ y $f''(x) = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ para $x \in U$.

Sea $h(x) := F(x, f(x)) = 0$ para toda $x \in U$. Entonces, por la regla de la cadena,

a) $0 = h'(x) = \dfrac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) + \dfrac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) \cdot f'(x)$, de donde,

b) $f'(x) = -\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))} = -\dfrac{f(x)\dfrac{2e^{-xf(x)}}{e^{xf(x)} + e^{-xf(x)}}}{x\dfrac{2e^{-xf(x)}}{e^{xf(x)} + e^{-xf(x)}}} = -\dfrac{f(x)}{x}$.

Esto mismo, en términos de "y", es:

c) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{x}$.

Para calcular $\dfrac{d^2f}{dx^2} = f''(x) = \dfrac{d^2y}{dx^2}$, usamos c) recordando que y es función de x. Se obtiene:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{dy}{dx}x - y}{x^2} = \frac{y - (-\frac{y}{x})x}{x^2} = \frac{y + y}{x^2} = \frac{2y}{x^2}.$$

En términos de f: $f''(x) = \dfrac{2f(x)}{x^2}$.

(2).- Consideremos la ecuación $x^3y + y^3x - 2 = 0$. En el punto $(x_0, y_0) = (1, 1)$ esta ecuación se anula. Sea $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^3y + y^3x - 2$. Entonces $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^3 + 3y^2x$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = 1 + 3 + 4 \neq 0$. Por el Teorema de la Función Implícita, se tiene que existen vecindades U de $x_0 = 1$ y V de $y_0 = 1$ y una función $g : U \to V$ tales que $f(x, y(x)) = 0$, es decir y es función de x en una vecindad de 1.

Ahora

$$\frac{dg}{dx} = \frac{dy}{dx} = -\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]^{-1} \cdot \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right] = -(x^3 + 3y^2x)^{-1} \cdot (3x^2y + y^3) = -\frac{3x^2y + y^3}{x^3 + 3y^2x}.$$

Más precisamente: $\dfrac{dg}{dx} = g'(x) = -\dfrac{3x^2g(x) + (g(x))^3}{x^3 + 3(g(x))^2x}$ o $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{3x^2y + y^2}{x^3 + 3y^2x}$.

(3).- Probemos que si $x^2 + y^2 + z^2 - \varphi(ax + by + cz) = 0$, entonces

$$(cy - bz)\frac{\partial z}{\partial x} + (az - cx)\frac{\partial z}{\partial y} = bx - ay,$$

donde φ es una función de clase C^1.

En efecto, sea $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función $F(x, y, z) = x^2 + z^2 - \varphi(ax + by + cz)$. Se tiene que F es una función de clase C^1. Supongamos además que $F(x, y, z) = 0$ y que $\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) \neq 0$ de tal suerte que podemos aplicar el Teorema de la Función Implícita a la función F para concluir que z está definida implícitamente como función de (x, y) en una vecindad del punto (x, y, z).

Sean $z = z(x, y)$ y $h(x, y) := F(x, y, z(x, y)) = 0$ para toda (x, y) en algún conjunto abierto.

Se tiene

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}; \quad \text{por tanto} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z}; \\ 0 &= \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}; \quad \text{por tanto} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z}. \end{aligned}$$

Se tiene que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x - a\varphi'(ax + by + cz); \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y - b\varphi'(ax + by + cz) \quad \text{y}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 2z - c\varphi'(ax + by + cz).$$

Luego

$$\begin{aligned} &(cy - bz)\frac{\partial z}{\partial x} + (az - cx)\frac{\partial z}{\partial x} = (bz - cy)\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z} + (cx - az)\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z} = \\ &= \frac{(bz - cy)(2x - a\varphi'(ax + by + cz)) + (cx - az)(2y - b\varphi'(ax + by + cz))}{2z - c\varphi'(ax + by + cz)} = \\ &= \frac{(2bxz - 2cxy + 2cxy - 2ayz) + (-abz + acy - bcx + abz)\varphi'(ax + by + cz)}{2z - c\varphi'(ax + by + cz)} = \\ &= \frac{(bx - ay)2z + (-bx + ay)c\varphi'(ax + by + cz)}{2z - c\varphi'(ax + by + cz)} = bx - ay. \end{aligned}$$

(4).- Consideremos las ecuaciones: $z^3x + \omega^2y^3 + 2xy = 0$, $xyz\omega - 1 = 0$.

Queremos poner (z, ω) en función de (x, y).

Sea $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la función

$$\begin{aligned} F((x,y),(z,\omega)) &= (z^3x + \omega^2 y^3 + 2xy, xyz\omega - 1) = (f_1, f_2); \\ \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial z} & \dfrac{\partial f_1}{\partial \omega} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial z} & \dfrac{\partial f_2}{\partial \omega} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3z^2x & 2\omega y^3 \\ xy\omega & xyz \end{bmatrix} = \Delta, \end{aligned}$$

$\det \Delta = 3x^2yz^3 - 2xy^4\omega^2.$

Sea $(x_0, y_0) = (-1,-1)$, $(z_0, \omega_0) = (1,1)$ y $F((-1,-1),(1,1)) = (0,0)$. Se tiene que $\det \Delta(-1,-1,1,1) = 3 \cdot 1(-1) \cdot 1 - 2(-1) \cdot 1 \cdot 1 = -3 + 2 = -1 \neq 0$. Por lo tanto exite $g : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $F((x,y), g(x,y)) = 0$.

Se sigue que $g(x,y) = (z,\omega)$. Por lo tanto (z,ω) se puede despejar en función de (x,y) alrededor de $(x_0,y_0) = (-1,-1)$ y $(z_0,\omega_0) = (1,1)$.

Ahora

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial x} & \dfrac{\partial z}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \omega}{\partial x} & \dfrac{\partial \omega}{\partial y} \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial z} & \dfrac{\partial f_1}{\partial \omega} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial z} & \dfrac{\partial f_2}{\partial \omega} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 3z^2x & 2\omega y^3 \\ xy\omega & xyz \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} z^3 + 2y & 3\omega^2 y^2 + 2x \\ yz\omega & xz\omega \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

En el punto $((-1,-1),(1,1))$, tenemos

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial x}(-1,-1) & \dfrac{\partial z}{\partial y}(-1,-1) \\ \dfrac{\partial \omega}{\partial x}(-1,-1) & \dfrac{\partial \omega}{\partial y}(-1,-1) \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Se sigue que

$$\frac{\partial z}{\partial z}(-1,-1) = -3; \ \frac{\partial z}{\partial y}(-1,-1) = -1; \ \frac{\partial \omega}{\partial x}(-1,-1) = 4; \ \frac{\partial \omega}{\partial y}(-1,-1) = 2.$$

(5).- Consideremos el sistema $\begin{aligned} u + v &= v \\ u - yv &= 0 \end{aligned}$ que definen implícitamente a u y v como funciones de (x,y) en alguna vecindad de (x,y,u,v). Veremos que condición se debe cumplir en ese punto.

Sea $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la función $F(x, y, u, v) = (F_1(x, y, u, v), F_2(x, y, u, v)) = (u + v - x, u - yv)$. La función F es de clase C^∞. Se supone que en el punto (x, y, u, v), $F(x, y, u, v) = (0, 0)$. Para que u y v estén definidos implícitamente como funciones de (x, y) en alguna vecindad del punto (x, y, u, v) es suficiente tener

$$\Delta = \det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial u} & \dfrac{\partial F_1}{\partial v} \\ \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial u} & \dfrac{\partial F_2}{\partial v} \end{bmatrix}_{(x,y,u,v)} \neq 0$$

en virtud del Teorema de la Función Implícita. Si lo anterior no sucede, nada nos garantiza tal teorema.

Se tienes pues

$$\det \Delta = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -y \end{bmatrix} = -y - 1 \neq 0 \iff y \neq -1.$$

Entonces $u = u(x, y)$ y $v = v(x, y)$ en alguna vecindad de (x, y), $y \neq 1$ y de (u, v).

Sea entonces $(0, 0) = h(x, y) = F(x, y, u(x, y), v(x, y))$ para toda (x, y) en esta primera vecindad.

Se tiene:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial h_1}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}, \\ 0 &= \frac{\partial h_2}{\partial x} = \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned}$$

De donde obtenemos

$$\frac{\partial F_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial F_1}{\partial x}; \quad \frac{\partial F_2}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial F_2}{\partial x}.$$

Este sistema de ecuaciones $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial x}$ tiene solución única porque su determi-

nante, que resulta ser $\det \Delta$, no es cero. La solución es:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\det \begin{bmatrix} -\frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ -\frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{bmatrix}}{\det \Delta} = \frac{\det \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -y \end{bmatrix}}{-y-1} = \frac{y}{-y-1} = -\frac{y}{y+1};$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\det \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & -\frac{\partial F_1}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & -\frac{\partial F_2}{\partial x} \end{bmatrix}}{\det \Delta} = \frac{\det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}{-y-1} = -\frac{1}{y+1}.$$

Análogamente se calculan $\frac{\partial u}{\partial y}$ y $\frac{\partial v}{\partial y}$.

7.3 Multiplicadores de Lagrange

Teorema 7.3.1 (Lagrange) *Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto. Sea $m < n$ y sean $f, g_1, \ldots, g_m : U \to \mathbb{R}$ funciones de clase C^1. Sea $\vec{x}_0 \in U$ tal que existe una vecindad V de $\vec{x}_0$ donde $f(\vec{x}) \leq f(\vec{x}_0)$ (ó $f(\vec{x}) \geq f(\vec{x}_0)$) para todos los $\vec{x} \in V$ tales que $g_1(\vec{x}) = \cdots = g_m(\vec{x}) = 0$ y tal que $g_1(\vec{x}_0) = \cdots = g_m(\vec{x}_0) = 0$. Supongamos que el rango de la matriz $Dg(\vec{x}_0)$ es m, donde $g = (g_1, \ldots, g_m)$.*

Entonces existen constantes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ tales que

$$\nabla f(\vec{x}_0) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(\vec{x}_0) = \lambda_1 \nabla g_1(\vec{x}_0) + \lambda_2 \nabla g_2(\vec{x}_0) + \cdots + \lambda_m \nabla g_m(\vec{x}_0).$$

Es decir, para toda $1 \leq i \leq n$, se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0) = \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_i}(\vec{x}_0) + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_i}(\vec{x}_0) + \cdots + \lambda_m \frac{\partial g_m}{\partial x_i}(\vec{x}_0) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(\vec{x}_0).$$

Demostración. Puesto que el rango de $Dg(\vec{x}_0)$ es m, podemos suponer que la matriz

$$\Delta = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\vec{x}_0) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_j}(\vec{x}_0) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_m}(\vec{x}_0) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_i}{\partial x_1}(\vec{x}_0) & \cdots & \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\vec{x}_0) & \cdots & \frac{\partial g_i}{\partial x_m}(\vec{x}_0) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(\vec{x}_0) & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_j}(\vec{x}_0) & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_m}(\vec{x}_0) \end{bmatrix}$$

es tal que $\det \Delta \neq 0$. Sea $\vec{x}_0 = (\vec{u}_0, \vec{v}_0)$, $\vec{u}_0 = (a_1, \ldots, a_m)$, $\vec{v}_0 = (a_{m+1}, \ldots, a_n)$. Ahora, se tiene que $g : A \subseteq \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^m$, $g(\vec{u}_0, \vec{v}_0) = g(\vec{x}_0) = 0$.

Por el Teorema de la Función Implícita tenemos que existe $h : B \subseteq \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^m$ de clase C^1 tal que $h(\vec{v}) = \vec{u}$, $h(\vec{v}_0) = \vec{u}_0$ y $g(h(\vec{v}), \vec{v}) = 0$ para toda $\vec{v} \in B$.

Sea $H : B \subseteq \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^n$, $H(\vec{v}) = (h(\vec{v}), \vec{v})$. La matriz jacobiana de H es:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial h_1}{\partial x_{m+1}} & \dfrac{\partial h_1}{\partial x_{m+2}} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial h_2}{\partial x_{m+1}} & \dfrac{\partial h_2}{\partial x_{m+2}} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial h_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial h_m}{\partial x_{m+1}} & \dfrac{\partial h_m}{\partial x_{m+2}} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial h_m}{\partial x_n} \\ 1 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & 1 \end{bmatrix}$$

cuyo rango es $(n-m)$. Sea $S = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid g(\vec{x}) = 0\}$, la cual es una superficie y $\vec{x}_0 \in S$.

Consideremos

$$B \subseteq \mathbb{R}^{n-m} \xrightarrow{H} S \subseteq \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}.$$

Entonces f tiene un valor extremo en $\vec{x}_0 \in S$. Por lo tanto $f \circ H$ tiene un valor extremo en v_0. Se sigue que $0 = D(f \circ H)(\vec{v}_0) = Df(H(\vec{v}_0)) \circ DH(\vec{v}_0) = Df(\vec{x}_0) DH(\vec{v}_0)$.

Ahora puesto que $g(S) \equiv 0$, se sigue que $(g \circ H)(B) = 0$. Por lo tanto $D(g \circ H)(\vec{v}_0) = Dg(H(\vec{v}_0)) \circ DH(\vec{v}_0) = Dg(\vec{x}_0) \circ DH(\vec{v}_0) = 0$.

Sea $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m+1}$ la transformación lineal dada, en las bases canónicas, por la matriz:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial g_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\vec{x}_0} = \begin{bmatrix} \nabla f(\vec{x}_0) \\ \hline Dg(\vec{x}_0) \end{bmatrix} = L.$$

Ahora L anula a los vectores columna de la matriz $DH(\vec{v}_0)$ que es de rango $n-m$. Por lo tanto $\dim \ker L \geq n-m$.

Por otro lado se tiene que rango $L + \dim \ker L = \dim \mathbb{R}^n = n$.

Se sigue que rango $L = n - \dim \ker L \leq n - (n-m) = m$. Por lo tanto rango $L \leq m$.

De esta forma obtenemos que las filas de L son linealmente dependientes. Por tanto existen $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_m \in \mathbb{R}$, no todos cero, tales que:

$$\beta_0 \nabla f(\vec{x}_0) + \beta_1 \nabla g_1(\vec{x}_0) + \cdots + \beta_m \nabla g_m(\vec{x}_0) = 0.$$

Finalmente en el caso de que $\beta_0 = 0$ se tendría que rango $Dg(\vec{x}_0) < m$ lo que implica que $\det \Delta = 0$ lo cual es contradictorio. Se sigue que $\beta_0 \neq 0$ y

$$\nabla f(\vec{x}_0) = \sum_{i=1}^{n} -\frac{\beta_i}{\beta_0} \nabla g_i(\vec{x}_0) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \nabla g_i(\vec{x}_0). \qquad \square$$

Ejemplos 7.3.2

(1).- Encontremos el valor máximo de la función $x^2 + xy + y^2 + yz + z^2$ sujeto a la condición $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Sean $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ las funciones:

$$f(x,y,z) = x^2 + xy + y^2 + yz + z^2, \quad g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1.$$

Se tiene que f y g son funciones de clase C^1. El problema consiste pues en encontrar el valor máximo de f restringida a la superficie S definida por la ecuación $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$.

Se tiene $Dg(x,y,z) = [\ 2x \quad 2y \quad 2z\ ]$, luego $Dg(x,y,z)$ tiene rango 1 $\iff$ $(x,y,z) \neq \vec{0}$. Puesto que $\vec{0} \notin S$, se tiene que $Dg(x,y,z)$ tiene rango 1 para toda $(x,y,z) \in S$.

Así pues los candidatos a extremos de f sobre S son las soluciones del sistema: $\nabla f(x,y,z) + \lambda \nabla g(x,y,z) = \vec{0}$, $g(z,y,z) = 0$ es decir:

$$\begin{aligned}
2x + y + 2\lambda x &= 0,\\
x + 2y + z + 2\lambda y &= 0,\\
y + 2z + 2\lambda z &= 0,\\
x^2 + y^2 + z^2 &= 1,
\end{aligned}$$

equivalentemente,

$$\begin{aligned}
2(1+\lambda)x + y &= 0,\\
x + z + 2(1+\lambda)y &= 0,\\
y + 2(1+\lambda)z &= 0,\\
x^2 + y^2 + z^2 &= 1,
\end{aligned}$$

o, equivalentemente,

$$2\lambda' x + y = 0, \tag{1}$$
$$x + z + 2\lambda' y = 0, \tag{2}$$
$$y + 2\lambda' z = 0, \tag{3}$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1. \tag{4}$$

Si $\lambda' = 0$ entonces (1), (2) implican que $y = 0$ y $z = -x$. Ahora bien, (3) implica que $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ por lo que $z = \mp\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Se sigue que si $\lambda' = 0$, entonces $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ son candidatos a extremos de f sobre S.

Ahora bien, si $\lambda' \neq 0$, entonces (1) y (3) implican que $y = -2\lambda' x$ y $y = -2\lambda' z$ por lo que $x = z$. Por otro lado, (2) implica que $2x - 4\lambda'^2 x = 0$ de donde se sigue que $(2 - 4\lambda'^2)x = 0$. Además, (4) implica que $x^2 + 4\lambda'^2 x^2 + x^2 = 1$ por lo que $x^2 = \dfrac{1}{2 + 4\lambda'^2} \neq 0$ de donde se sigue que $2 - 4\lambda'^2 = 0$. Por lo tanto $\lambda'^2 = \dfrac{1}{2}$. De esta forma obtenemos $x^2 = \dfrac{1}{4}$, es decir, $x = \pm\dfrac{1}{2} = z$ y$\lambda' = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Por lo tanto $\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{2}\right)$, $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{2}\right)$, $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{2}\right)$ y $\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{2}\right)$ son candidatos a extremos de f sobre S.

Los 6 puntos obtenidos son todos los posibles extremos de f sobre S.

Como f es continua y S es compacto, f alcanza su máximo en S.

Este máximo debe ser uno de estos seis puntos.

Primero observamos que si $(x, y, z) \in S$, entonces $f(x, y, z) = x^2 + xy + y^2 + yz + z^2 = 1 + xy + yz$.

Se tiene:

$$
\begin{aligned}
f\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\Big) = f\Big(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\Big) &= 1, \\
f\Big(\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\Big) = f\Big(-\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\Big) &= 1 - \frac{1}{\sqrt{8}} - \frac{1}{\sqrt{8}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, \\
f\Big(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\Big) = f\Big(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\Big) &= 1 + \frac{1}{\sqrt{8}} + \frac{1}{\sqrt{8}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto el valor máximo de $x^2 + xy + y^2 + yz + z^2$ con la condición $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ es $1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

(2).- Encontremos los valores extremos de $f(x, y, z) = x + y + z$ sujetos a las condiciones $x^2 + y^2 = 2$ y $x + z = 1$.

Sean $g_1(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2$, $g_2(x,y,z) = x + z - 1$. Entonces:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 = 2\lambda_1 x + \lambda_2 = \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial x},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 1 = 2\lambda_1 y = \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial y},$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = 1 = \lambda_2 = \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial z}$$

Por lo tanto

$$\lambda_2 = 1, \quad y = \frac{1}{2\lambda_1},$$
$$2\lambda_1 x = 0 \quad \text{de donde} \quad x = 0,$$
$$g_1(x,y,z) = y^2 - 2 = 0,$$
$$\text{por lo que} \quad y = \pm\sqrt{2}, \quad z = 1.$$

De esta forma obtenemos que los puntos críticos son $\big(0, \pm\sqrt{2}, 1\big)$.

Se tiene que

$$f\big(0, \sqrt{2}, 1\big) = 1 + \sqrt{2} \quad \text{es el máximo},$$
$$f\big(0, -\sqrt{2}, 1\big) = 1 - \sqrt{2} \quad \text{es el mínimo}.$$

(3).- Los planos $x+y-z-2w = 1$ y $x-y+z+w = 2$ se cortan en un conjunto $\mathcal{F}$ en $\mathbb{R}^4$. Encontremos el punto $\mathcal{F}$ más cercano al origen.

Sea $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ la función $g = (g_1, g_2)$, donde

$$g_1(x,y,z,w) = x + y - z - 2w - 1 \quad \text{y} \quad g_2(x,y,z,w) = x - y + z + w - 2.$$

Nuestro conjunto $\mathcal{F}$ es la superficie definida por las ecuaciones $g_1(x,y,z,w) = 0$; $g_2(x,y,z,w) = 0$. Se tiene que g es de clase C^1.

Entonces $Dg(x,y,z,w) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Luego $Dg(x,y,z,w)$ tiene rango 2 para toda (x,y,z,w).

Encontrar el punto $\mathcal{F}$ más cercano al origen equivale a minimizar la distancia de los puntos de $\mathcal{F}$ al origen y esto equivale a minimizar el cuadrado de esta distancia.

Sea pues $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ la función $f(x,y,z,w) = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$. Se tiene que f es de clase C^1. Se quiere encontrar el punto (x,y,z,w) donde f alcanza su mínimo valor, restringido a la superificie $\mathcal{F}$.

Así pues los candidatos a extremos de f sobre $\mathcal{F}$ son las soluciones del sistema:

$$\nabla f(x,y,z,w) + \lambda_1 \nabla g_1(x,y,zw) + \lambda_2 \nabla g_2(x,y,z,w) = \vec{0},$$
$$g_1(x,y,z,w) = 0, \quad g_2(x,y,z,w) = 0.$$

Es decir:

$$2x + \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \tag{1}$$
$$2y + \lambda_1 - \lambda_2 = 0, \tag{2}$$
$$2z - \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \tag{3}$$
$$2w - 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0, \tag{4}$$
$$x + y - z - 2w = 1, \tag{5}$$
$$x - y + z + w = 2. \tag{6}$$

Se tiene que $(1),(2),(3),(4)$ implican que $2x + 2y - 2z - 4w + 7\lambda_1 - \lambda_2 = 0$. Ahora bien (5) implica que $2 + 7\lambda_1 - 3\lambda_2 = 0$. Por lo tanto $2x - 2y + 2z + 2w - 3\lambda_1 + 4\lambda_2 = 0$. Por otro lado (6) implica $4 - 3\lambda_1 + 4\lambda_2 = 0$. Obtenemos

$$\lambda_1 = \frac{\det \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}}{19} = -\frac{20}{19}; \quad \lambda_2 = \frac{\det \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}}{19} = -\frac{34}{19}.$$

De $(1),(2),(3),(4)$ obtenemos que $x = \frac{27}{19}$, $y = -\frac{7}{19}$, $z = \frac{7}{19}$, $w = -\frac{3}{19}$.

De esta forma hemos obtenido que el único candidato a extremo de f sobre $\mathcal{F}$ es el punto $\left(\frac{27}{19}, -\frac{7}{19}, \frac{7}{19}, -\frac{3}{19}\right)$. Ahora bien, f es continua no negativa y $\lim\limits_{\|\vec{x}\| \to \infty} f(\vec{x}) = +\infty$. Como $\mathcal{F}$ es un cerrado en $\mathbb{R}^4$, f debe alcanzar su mínimo en $\mathcal{F}$. Este punto debe ser pues $\left(\frac{27}{19}, -\frac{7}{19}, \frac{7}{19}, -\frac{3}{19}\right)$.

(4).- Encontremos el mayor volumen de una caja rectangular cuya área total sea de $10m^2$.

Sea

$$\text{Volumen } = V = V(x,y,z) = xyz \quad \text{y}$$
$$\text{Área} = A = 2xy + 2zy + 2xy = 2(xy + xz + yz) = 10.$$

Sea $g(x,y,z) = xy + xz + yz - 5$.

Se tiene

$$\frac{\partial V}{\partial x} = yz = \lambda(y+z) = \frac{\partial g}{\partial x};$$
$$\frac{\partial V}{\partial y} = xz = \lambda(x+z) = \frac{\partial g}{\partial y};$$
$$\frac{\partial V}{\partial z} = xy = \lambda(x+y) = \frac{\partial g}{\partial z}.$$

Por lo tanto, si $x = 0$ entonces $\lambda y = \lambda z = 0$ por lo que $yz = 0$ y $yz = 5$ lo cual es absurdo. Se sigue que $x \neq 0$. Analogamente $y \neq 0$, $z \neq 0$ y $\lambda \neq 0$.

Obtenemos que

$$\begin{aligned} xyz &= \lambda xy + \lambda xz; \\ &= \lambda xy + \lambda yz; \\ &= \lambda xz + \lambda yz. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\lambda xz = \lambda yz = \lambda xy$ lo cual implica que $x = y = z$. Se sigue que $g(x, y, z) = 3x^2 - 5 = 0$ por lo que $x = \pm\sqrt{\frac{5}{3}}$.

De esta forma obtenemos que V alcanza su máximo en

$$(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\right)$$

y el volumen máximo será igual a $V(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\right)^3 = \left(\frac{5}{3}\right)^{3/2}$.

7.4 Ejercicios

1) Sean $u(x, y) = x^2 - y^2$, $v(x, y) = 2xy$. Mostrar que la función $(x, y) \to (u, v)$ es localmente invertible en todos los puntos $(x, y) \neq (0, 0)$ y calcular $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}$.

2) Investigador si el sistema

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= x + xyz, \\ v(x, y, z) &= y + xy, \\ \omega(x, y, z) &= z + 2x + 3z^2 \end{aligned}$$

puede ser resuelto para x, y, z en términos de u, v, ω cerca de $(0, 0, 0)$.

3) Sea $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación lineal tal que $\det L \neq 0$ y sea $f(\vec{x}) = L(\vec{x}) + g(\vec{x})$, donde $\|g(\vec{x})\| \leq M\|\vec{x}\|^2$, con $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Se supone que f es de clase C^1. Mostrar que f es localmente invertible en $\vec{0}$.

4) a) Coordenas Polares: Sean

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta, \\ y &= r\operatorname{sen}\theta. \end{aligned}$$

¿Cuando puede resolverse (r, θ) en términos de (x, y)?

b) Coordenadas Esféricas: Sean

$$\begin{aligned} x &= r\operatorname{sen}\varphi\cos\theta, \\ y &= r\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta, \\ z &= r\cos\varphi. \end{aligned}$$

¿Cuando puede resolverse (r, φ, θ) en términos de (x, y, z)?

c) Coordenadas Cilíndricas: Sean

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta, \\ y &= r\operatorname{sen}\theta, \\ z &= z. \end{aligned}$$

¿Cuando puede resolverse (r, θ, z) en términos de (x, y, z)?

5) Sean

$$\begin{aligned} x &= u + v + \omega, \\ y &= u^2 + v^2 + \omega^2, \\ z &= u^3 + v^3 + \omega^3. \end{aligned}$$

Calcular $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ en la imagen $(x, y, z) = (2, 6, 8)$ de $(u, v, \omega) = (1, 2, -1)$.

6) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la función $f(u, v) = (u^2 + u^2v + 10v, u + v^3)$.

a) Demostrar que f tiene una inversa en una vecindad del punto $(1, 1)$.

b) Encontar el valor aproximado de $f^{-1}(11.8, 2.2)$.

7) Demostrar que la función diferenciable $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dada por: $F(x, y, z) = (f(x, y, z), g(x, y, z), f(x, y, z)+g(x, y, z))$, donde $f, g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, no puede tener una inversa diferenciable.

8) Sean

$$\begin{aligned} x &= \varphi(u,v), \\ y &= \psi(u,v). \end{aligned}$$

Encontrar $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}$ y $\frac{\partial v}{\partial y}$.

9) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una función de clase C^1 tal que $Df(\vec{x}) \neq 0$ para toda $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$. Mostrar que si f satisface $\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y}, \frac{\partial f_2}{\partial x} = -\frac{\partial f_1}{\partial y}$, entonces es localmente invertible y la inversa g también satisface $\frac{\partial g_1}{\partial x} = \frac{\partial g_2}{\partial y}, \frac{\partial g_2}{\partial x} = -\frac{\partial g_1}{\partial y}$.

10) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$.

Probar que $f'(0) \neq 0$, pero que f no es invertible en ninguna vecindad de 0. ¿Contradice esto el Teorema de la Función Inversa?

11) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 y sean $u = f(x)$, $v = -y + xf(x)$.

Si $f'(x_0) \neq 0$, mostrar que la función $F(x,y) = (u,v)$ es invertible cerca de (x_0, y), $y \in \mathbb{R}$ y tiene la forma $x = f^{-1}(u)$, $y = -v + uf^{-1}(u)$.

12) Sea A un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$ y sea $f : A \to \mathbb{R}^n$ una función inyectiva tal que $\det f'(\vec{x}) \neq 0$ para toda $\vec{x} \in A$. Probar que $f(A)$ es un conjunto abierto y que $f^{-1} : f(A) \to A$ es diferenciable. Demostrar que $f(B)$ es abierto para cada subconjunto abierto $B \subseteq A$.

13) a) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que $f'(a) \neq 0$ para toda $a \in \mathbb{R}$. Demostrar que f es inyectiva en todo $\mathbb{R}$.

b) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la función $f(x,y) = (e^x \cos y, e^x \operatorname{sen} y)$. Demostrar que el jacobiano de $f(x,y)$ es diferente de 0 para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ pero que f no es inyectiva.

14) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1. Demostrar que f no es inyectiva.

Sugerencia: Si $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \neq 0$ para toda (x,y) en un abierto, sea $g : A \to \mathbb{R}^2$ la función $g(x,y) = (f(x,y), y)$.

15) El punto $(x,y,t) = (0,1,-1)$ satisface las ecuaciones

$$xyt + \operatorname{sen} xyt = 0, \qquad x + y + t = 0.$$

¿Están x y y definidas como funciones de t en una vecindad de $(0,1,-1)$?

16) Considerar la ecuación $(x-2)^3 y + xe^{y-1} = 0$.

   a) ¿Está y definida implícitamente como función de x en una vecindad de $(x, y) = (0, 0)$?

   b) ¿En una vecindad de $(2, 1)$?

   c) ¿En una vecindad de $(1, 1)$?

17) Discutir la resolubilidad del sistema:

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z^2 + u + v^2 &= 0, \\ 4x + 3y + z + u^2 + v + \omega + 2 &= 0, \\ x + z + \omega + u^2 + 2 &= 0 \end{aligned}$$

para u, v, ω en términos de x, y, z cercanos a $x = y = z = 0$, $u = v = 0$, $\omega = -2$. Es decir, "despejar" u, v, ω en términos de (x, y, z).

18) Discutir la resolubilidad del sistema $y + x + uv = 0$, $uxy + v = 0$ para u, v en términos de x, y cerca de $x = y = u = v = 0$ y verificar directamente la respuesta.

19) Sea y una función de x determinada por la ecuación $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Calcular $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}, \dfrac{d^3y}{dx^3}$.

20) Sea $f(x, y, z) = 0$. Probar que $\dfrac{\partial x}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial x}{\partial z} = -1$ y $\dfrac{\partial x}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial x} = 1$.

¿Que significan realmente estos resultados?

21) Calcular $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, si $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

22) Sea $z = \varphi(x, y)$ donde y es una función de x determinada por la ecuación $\psi(x, y) = 0$. Calcular $\dfrac{dz}{dx}$.

23) Sea t una función de (x, y) determinada por la ecuación $F(x, y, t) = 0$. Se supone que y queda determinada implícitamente como una función de x por la ecuación $y = f(x, t)$. Comprobar que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial F}{\partial t} - \dfrac{\partial f}{\partial t} \cdot \dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial t} \cdot \dfrac{\partial F}{\partial y} + \dfrac{\partial F}{\partial t}}.$$

24) Sea $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Para cada x se define $g_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $g_x(y) = f(x, y)$. Se supone que para cada x existe una única y con $g_x'(y) = 0$. Sea $c(x)$ esta y.

   a) Si $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \neq 0$ para toda (x, y), probar que c es diferenciable y

$$c'(x) = -\frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, c(x))}{\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, c(x))}.$$

   Sugerencia: $g_x'(y) = 0$ puede escribirse $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$.

   b) Demostrar que si $c'(x) = 0$, entonces para algún y se tiene

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

25) Probar que el Teorema de la Función Implícita implica el Teorema de la Función Inversa.

26) Una caja rectangular sin tapa tiene un área total de $16m^2$. Hallar las dimensiones que maximizan el volumen.

27) Consideremos un vaso cilíndrico de metal de un litro de capacidad. ¿Cuales deben ser sus medidas para que se use el mínimo de metal?

28) ¿Cual es el punto del plano $2x + 3y - z = 5$ más cercano al origen?

29) Encontrar las dimensiones de la caja de volumen máximo que podemos meter en el elipsoide $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, suponiendo que cada lado de la caja es paralelo al eje coordenado.

30) a) Encontrar el máximo de la función $f(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 \cdots x_n)^2$ sujeto a la condición $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$.

   b) Mostrar que si $\{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq \mathbb{R}^+$, entonces

$$(a_1 \cdots a_n)^{1/n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}.$$

31) En los problemas siguientes encontrar los extremos de f sujetos a las condiciones dadas.

   a) $f(x, y) = 3x + 2y$, $2x^2 + 3y^2 = 3$;

b) $f(x,y,z) = x - y + z$, $x^2 + y^2 + z^2 = 2$;

c) $f(x,y,z) = x + y + z$, $x^2 - y^2 = 1, 2x + z = 1$.

32) Mostrar que la función $f(x,y) = (y - x^2)(b - 2x^2)$ no tiene un extremo local en $(0,0)$, pero si un mínimo local a lo largo de cualquier línea $x = \alpha t$, $y = \beta t$.

33) Encontrar la mínima distancia entre la elipse $x^2 + 2y^2 = 1$ y la recta $x + y = 4$ en $\mathbb{R}^2$.

34) Los planos $x + y - z - 2\omega = 1$ y $x - y + z + \omega = 2$ se cortan en un conjunto F de $\mathbb{R}^4$. Encontrar el punto de F más cercano al origen.

35) Encontrar el punto sobre la parábola $2x^2 - 4xy + 2y^2 - x - y = 0$ más próximo a la recta $9x - 7y + 16 = 0$.

Apéndice A

Desigualdad de Minkowski

Lema A.0.1 *Sean* $p \in \mathbb{R}$, $p > 1$ *y* q *definido tal que* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. *Sean* $a \geq 0$, $b \geq 0$.

Entonces $a^{1/p} \cdot b^{1/q} \leq \dfrac{a}{p} + \dfrac{b}{q}$.

Demostración. Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(t) = t^\alpha - \alpha t + \alpha - 1$, $0 < \alpha < 1$. Entonces $f'(t) = \alpha t^{\alpha-1} - \alpha = \alpha(t^{\alpha-1} - 1)$. Además $f(1) = 0$ y $f'(1) = 0$.

Por otra parte $f'(t) > 0$ para $0 < t < 1$ pues $\dfrac{1}{t} > 1$ y $\left(\dfrac{1}{t}\right)^{1-\alpha} = t^{\alpha-1} > 1$ y $f'(t) < 0$ si $t > 1$ ya que $\dfrac{1}{t} < 1$. Por lo tanto $f(t) \leq 0$ para $t \geq 0$ pues f es decreciente para $t > 1$ y $f(1) = 0$, esto es, f tiene su máximo en $t = 1$.

Ahora si $b = 0$ se sigue inmediatamente que la desigualdad se cumple. Supongamos pues $b > 0$.

Sea $t = \dfrac{a}{b}$ y sea $\alpha = \dfrac{1}{p}$. Entonces $f\left(\dfrac{a}{b}\right) = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{1/p} - \dfrac{1}{p}\dfrac{a}{b} + \dfrac{1}{p} - 1 \leq 0$. Por lo tanto $\dfrac{a^{1/p}}{b^{1/p-1}} - \dfrac{a}{p} + b\left(\dfrac{1}{p} - 1\right) = \dfrac{a^{1/p}}{b^{-1/q}} - \dfrac{a}{p} - \dfrac{b}{q} \leq 0$. Se sigue que $a^{1/p} \cdot b^{1/q} \leq \dfrac{a}{p} + \dfrac{b}{q}$. ❑

Lema A.0.2 (Desigualdad de Hölder) *Si* $p > 1$ *y* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, *entonces para cualesquiera* $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots y_n \in \mathbb{R}$ *se tiene:*

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \left\{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right\}^{1/p} \left\{\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right\}^{1/q}.$$

Demostración. Sean $X = \left\{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right\}^{1/p}$, $Y = \left\{\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right\}^{1/q}$.

Si X o $Y = 0$ entonces el resultado se sigue inmediatamente. Supongamos pues que $X \neq 0 \neq Y$, esto es, $X > 0$, $Y > 0$.

Sean $a_j = \dfrac{|x_j|^p}{X^p} \geq 0$, $b_j = \dfrac{|y_i|^q}{Y^q} \geq 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Por el lema anterior se tiene que $a_j^{1/p} \cdot b_j^{1/q} \leq \dfrac{a_j}{p} + \dfrac{b_j}{q}$ o lo que es lo mismo, $\dfrac{|x_j y_j|}{X \cdot Y} \leq \dfrac{a_j}{p} + \dfrac{b_j}{q}$. Por lo tanto

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{|x_j y_j|}{XY} \leq \frac{1}{p} \sum_{j=1}^{n} a_j + \frac{1}{q} \sum_{j=1}^{n} b_j = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

pues $\sum_{j=1}^{n} a_j = \dfrac{1}{X^p} \sum_{j=1}^{n} |x_j|^p = \dfrac{X^p}{X^p} = 1$ y $\sum_{j=1}^{n} b_j = \dfrac{1}{Y^q} \sum_{j=1}^{n} |y_j|^q = \dfrac{Y^q}{Y^q} = 1$. Se sigue que

$$\sum_{i=1}^{n} |x_j y_j| \leq X \cdot Y = \left\{ \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right\}^{1/p} \left\{ \sum_{i=1}^{n} |y_i|^q \right\}^{1/q}. \qquad ❑$$

Teorema A.0.3 (Desigualdad de Minkowski) *Para* $p \geq 1$ *y* $x_1, \ldots, x_n;\ y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ *se tiene:*

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p \right\}^{1/p} \leq \left\{ \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right\}^{1/p} + \left\{ \sum_{i=1}^{n} |y_i|^p \right\}^{1/p}.$$

Demostración. Si $p = 1$ esta no es más que la desigualdad del triángulo en $\mathbb{R}$.

Sea $p > 1$. Se tiene que $\left\{ \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p \right\}^{1/p} \leq \left\{ \sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|)^p \right\}^{1/p}$.

Ahora bien

$$(|x_i| + |y_i|)^p = |x_i|(|x_i| + |y_i|)^{p-1} + |y_i|(x_i| + |y_i|)^{p-1},$$

por lo tanto

$$\sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|)^p = \sum_{i=1}^{n} \{|x_i|(|x_i| + |y_i|)^{p-1}\} + \sum_{i=1}^{n} \{|y_i|(|x_i| + |y_i|)^{p-1}\} \underset{\substack{\text{Desigualdad} \\ \text{de Hölder}}}{\leq}$$

$$\leq \left\{ \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right\}^{1/p} \left[\sum_{i=1}^{n} \{(|x_i| + |y_i|)^{p-1}\}^q \right]^{1/q} + \left\{ \sum_{i=1}^{n} |y_i|^p \right\}^{1/p} \left[\sum_{i=1}^{n} \{(|x_i| + |y_i|)^{p-1}\}^q \right]^{1/q} =$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ (p-1)q = pq - q = p}}{=} \left[\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p \right)^{1/p} \right] \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} \left(|x_i| + |y_i| \right)^p \right]^{1/q}.$$

Entonces

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|)^p}{\left[\sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|)^p\right]^{1/q}} = \left[\sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|)^p\right]^{1-1/q} = \left[\sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|)^p\right]^{1/p} \leq$$

$$\leq \left[\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right]^{1/p} + \left[\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\right]^{1/p}. \qquad ❏$$

Corolario A.0.4 *La función* $\|\cdot\|_p = \mathcal{N}_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *dada por* $\|\vec{x}\|_p = \left[\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right]^{1/p}$*, donde* $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$*,* $p \geq 1$ *es una norma sobre* $\mathbb{R}^n$ *llamada la* norma p *o* norma p-ésima

Demostración. Si $p = 1$ ya se tiene así como también para $p = 2$.
Sea $p > 1$.

i).- $|x_i| \geq 0$ para toda $1 \leq i \leq n$. Por lo tanto $\|\vec{x}\|_p = \left[\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right]^{1/p} \geq 0$.

ii).- $\|\vec{x}_p\| = 0 \iff \|\vec{x}_p\|^p = 0 = \sum_{i=1}^{n}|x_i|^p \iff |x_i|^p = 0$ para toda $1 \leq i \leq n \iff$ $|x_i| = 0$ para toda $1 \leq i \leq n \iff x_i = 0$ para toda $1 \leq i \leq n \iff \vec{x} = 0$.

iii).- Si $\alpha \in \mathbb{R}$, $\|\alpha\vec{x}\|_p = \|(\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)\|_p = \left[\sum_{i=1}^{n}|\alpha x_i|^p\right]^{1/p} = \left[\sum_{i=1}^{n}|\alpha|^p|x_i|^p\right]^{1/p} =$

$$\left[|\alpha|^p\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right]^{1/p} = (|\alpha|^p)^{1/p}\left[\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right]^{1/p} = |\alpha|\|\vec{x}\|_p.$$

iv).- Si $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces aplicando la desigualdad de Minkowski se tiene:

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|_p = \|(x+y_1, \ldots, x_n+y_n)\|_p = \left[\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p\right]^{1/p} \leq$$

$$\leq \left[\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right]^{1/p} + \left[\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\right]^{1/p}| = \|\vec{x}\|_p + \|\vec{y}\|_p. \qquad ❏$$

Bibliografía

[1] Apostol, T. M., *Calculus, Vol II, 2nda. Edición*, Xerox College Publishing, Waltman, Massachusetts, 1969.

[2] Bartle, R. M., *The Elements of Real Analysis*, Wiley International, Estados Unidos, 1964.

[3] Demidovich B., Baranenkov, G., Efimenko, V., Kogan, S., Lunts, G., Porshneva, E., Sichova, E., Frolov, S., Shostak, R. y Yampolski, A., *Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático, Quinta Edición*, Editorial Mir, Moscú, 1977.

[4] Gel'Fand, I. M., *Lectures on Linear Algebra*, Interscience Publishers, Inc., New York, 1961.

[5] Lima, E. L., *Análise No Espaco* $\mathbb{R}^n$

[6] Mardsen, J.E., *Elementary Classical Analysis*, Editorial W.H. Freeman and Company, San Francisco, 1974.

[7] Spivak, M., *Cálculo en Variedades*, Reverté, S.A., Barcelona, 1972.

[8] Williamson, R.E., Crowell R.H. y Trotter H.F., *Cálculo de Funciones Vectoriales*, Pentice Hall Internacional, México, 1973.

Indice alfabético